21 Aprile 2022 – VI Edizione

Gara di Matematica Premio Danti

Dipartimento di Matematica e Informatica

Università degli studi di Perugia

POSSIBILI SOLUZIONI DEI QUESITI PROPOSTE

1. CRUCINUMERICO

[1] 1	0	■	[2] 2	[3] 7
0	■	[4] 1	1	2
[5] 6	7	5	■	■
4	■	1	■	[6] 7

1-O $16383 = 16384 - 1 = 2^{14} - 1 = (2^7 - 1)(2^7 + 1) = 129 \cdot 127 = 3 \cdot 43 \cdot 127$
Il più grande numero primo è 127 quindi $1 + 2 + 7 = 10$.

2-O Possiamo scrivere l'equazione nella forma $b \cdot 2022 + a \cdot 2022 = ab$ da cui segue che

$$(a - 2022)(b - 2022) = 2022^2$$

$$2022^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 337^2$$

$$(2 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (2 + 1) = 27.$$

4-O 112

5-O Notiamo che $2022 = 674 + 674 + 674$. Per esprimere 2022 come somma di 5 numeri, dobbiamo dividere alcuni di questi. Otteniamo 2 possibilità $2022 = 674 + 1 + 674 + 1 + 672$ o $2022 = 674 + 1 + 673 + 1 + 673$. In tutti e due i casi il minimo valore è 675.

6-O $n^2 = k^3$ e $n^3 = m^2$ con k e m interi positivi. $n^6 = k^9 = m^4$, sia $a = n^6$ possiamo notare che a è una potenza 36-esima poiché $mcm(9, 4) = 36$ quindi n è una potenza sesta. Il più piccolo numero che è una potenza sesta ed è divisibile per 20 è 10^6 quindi il numero di cifre di tale numero è 7.

1-V Se n è un numero primo allora lui è coprimo con tutti i suoi precedenti, dunque soddisfa la proprietà richiesta. Sia n non primo, dunque lo si può scrivere come $n = s \cdot t$ con $s < n$ e $t < n$. Se $s \neq t$ allora s e t sono due fattori distinti di $(n-1)!$, perciò si ha divisibilità. Se invece $s = t$ allora $n = p^2$, con p primo (in tutti gli altri casi si trova una fattorizzazione con fattori distinti). Osservando infine che $p^2 > 2p$ per ogni $p > 2$ possiamo concludere che p e $2p$ sono due fattori distinti di $(n-1)!$. I numeri che soddisfano la richiesta sono dunque tutti i numeri primi minori di 100 e il numero 4. Quindi

2+3+4+5+7+11+13+17+19+23+29+31+37+41+43+47+53+59+61+67+71+73+79+83+89+97=1064.

4-V Possiamo scrivere $7^a = 7 \cdot (7^2)^{\frac{a-1}{2}}$, da cui segue che $7^a \equiv 7\, mod\, 48$, analogamente $3^b = 3 \cdot (3^2)^{\frac{b-1}{2}}$, quindi $3^b \equiv 3\, mod\, 8$. La risposta è quindi $3 \cdot 7 = 21$.

3-V Un numero compreso tra 1000 e 100000 può essere scritto nella forma $a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ con $a_3 \neq 0$. Poiché il numero è palindromo $a_3 = a_0$ e $a_2 = a_1$. Possiamo scrivere quindi $1001a_3 + 110a_2$. 1001 è divisibile per 7 ma 110 no quindi $a_2 = 0$ e si hanno 9 numeri palindromi. Se $a_2 = 7$ possiamo ottenere altri 9 palindromi divisibili per 7. Il numero totale di numeri palindromi tra 1000 e 10000 è $10 \cdot 9 = 90$, quindi il numero di palindromi non divisibili per 7 è 72.

4-V $1 + 2 + \cdots 99 = 99 \cdot 100 \cdot \frac{1}{2} = 99 \cdot 50$, la media è $\frac{99 \cdot 50 + x}{100} = 10x$ da cui segue che $x = \frac{50}{101}$ quindi 151.

2. NUMERI MAGICI

Se k=2021 allora si deve dimostrare che $2021^2(ab)^{2022} < 1$ ovvero che $2021 \cdot (ab)^{\frac{2022}{2}} < 1$.

Dalle condizioni poste su a, b si ha che $\frac{a^{2022}+1}{a} = c = \frac{b^{2022}+1}{b}$, da cui $ab(a^{2021} - b^{2021}) = a - b$.

Scomponendo la differenza di potenze e dividendo primo e secondo membro per $(a - b)$, si ha $ab(a^{2020} + a^{2019}b + \cdots + b^{2020}) = 1$.

Usando la disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica e tenendo conto che il prodotto di tutti gli addendi è del tipo $\left((ab)^{1+2+3+\ldots+2020}\right)$ $con\ a \neq b$, si ha $1 = ab(a^{2020} + a^{2019}b + \cdots + b^{2020}) > ab \cdot 2021 \left((ab)^{2021 \cdot \frac{2020}{2}}\right)^{\frac{1}{2021}} = 2021 \cdot (ab)^{\frac{2020}{2}}$.

3. LA COMMISSIONE DEL CALENDARIO GIULIANO

Consideriamo un grafo i cui vertici siano le n persone e mettiamo un arco tra due vertici quando due persone si scambiano una lettera. Dal testo si deduce che $n \geq 5$.

a) Per provare che ogni membro scrive almeno una lettera, basta far vedere che il grafo è completo.

Supponiamo che A_1 e A_2 si scambino una lettera mentre A_1 e A_3 no. Se consideriamo i sottoinsiemi $\{A_1, A_4, \ldots, A_n\}$; $\{A_2, A_4, \ldots, A_n\}$ e $\{A_3, A_4, \ldots, A_n\}$, in ciascuno di questi sottoinsiemi vengono scambiate 3^m lettere. Quindi il numero di archi che collega A_1 a $\{A_4, \ldots, A_n\}$; A_2 a $\{A_4, \ldots, A_n\}$; e A_3 a $\{A_4, \ldots, A_n\}$; è lo stesso numero k.

Se ora consideriamo $\{A_1, A_2, A_4, \ldots, A_n\}$ il numero di archi è $S = 3^m + k + 1$. Se dallo stesso insieme togliamo un qualunque vertice, il numero di archi è 3^m quindi ogni vertice è collegato agli altri da $k + 1$ archi da cui deduciamo ancora che $S = \frac{1}{2} \cdot (n - 1)(k + 1)$.

Consideriamo ora l'insieme $\{A_1, A_3, A_4, \ldots, A_n\}$, ripetendo lo stesso ragionamento troviamo che il numero di archi è $T = 3^m + k = \frac{1}{2} \cdot (n - 1)k$. Essendo $S = T + 1$ segue che $n = 3$ contro l'ipotesi $n \geq 5$. Ne deduciamo che tutti i vertici sono collegati, cioè il grafo è completo.

b) Detto questo, il numero di archi tra $n-2$ vertici è quindi $\frac{(n-2)(n-3)}{2} = 3^m$ ovvero $(n-2)(n-3) = 2 \cdot 3^m$.

Poiché uno solo dei due fattori è dispari, si deduce che n è dispari. Il fattore 2 si ottiene solo per $n = 5$, quindi il numero di membri è esattamente 5.

4. LA MERIDIANA DI EGNAZIO

Poiché $TR \parallel AQ$ per costruzione, dimostriamo che $FG \perp AQ$. Sia $S' = FG \cap AQ$. Si traccino i segmenti PC e BQ (fig.1).

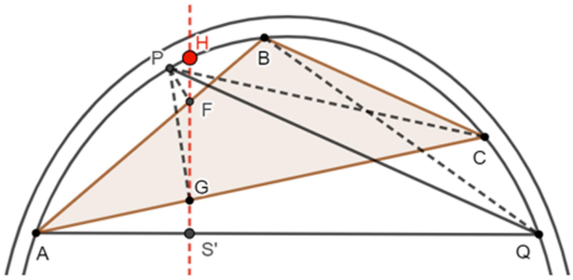

Fig.1

Poiché $BC \parallel PQ$, si ha:

$Q\hat{A}C = Q\hat{P}C$ perché insistono sullo stesso arco QC;

$P\hat{Q}B = P\hat{C}B$ perché insistono sullo stesso arco BP;

Poiché anche $P\hat{C}B = Q\hat{P}C$, in quanto alterni interni nel sistema di rette parallele BC e PQ tagliate dalla trasversale PC, gli angoli suddetti sono tutti uguali tra loro (fig.2).

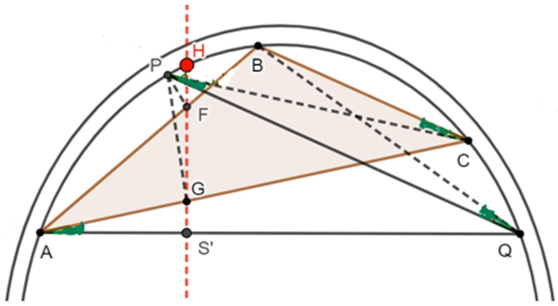

Fig.2

Si osservi che FG è la retta di Simson relativa a P nella circonferenza circoscritta al triangolo ABC.
Quindi $FG \perp BC$. Sia $E = FG \cap BC$ (fig.3).

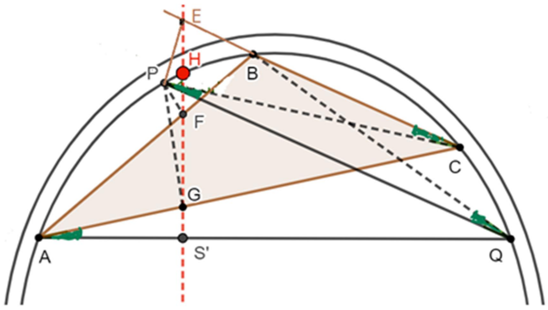

Fig.3

Si consideri ora il quadrilatero PGCE. Poiché i suoi angoli interni in E e in G sono retti, il quadrilatero è ciclico e $P\hat{G}E = P\hat{C}E$ perché insistono sullo stesso arco EP (fig.4).

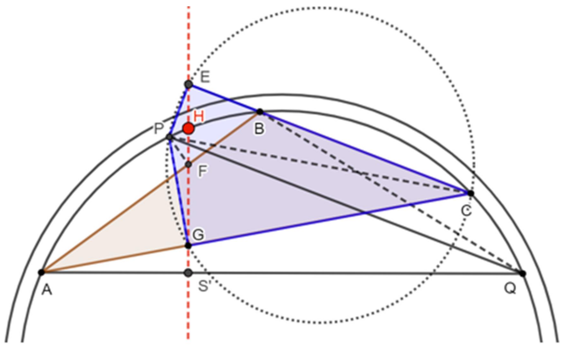

Fig.4

Poiché $P\hat{C}E = P\hat{C}B$ allora anche l'angolo $P\hat{G}E$ è uguale a tutti gli altri (fig.5)

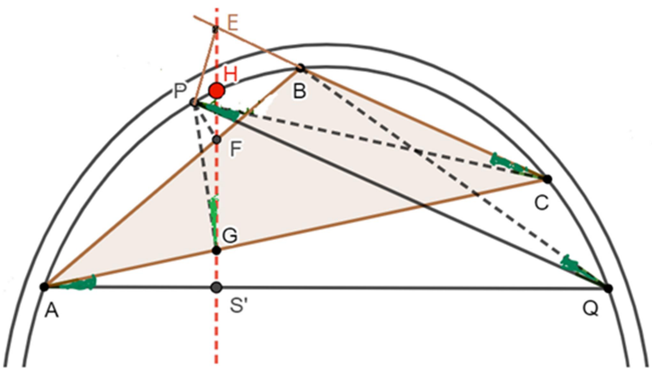

Fig.5

Poiché $P\hat{G}C$=90°, i due angoli acuti del triangolo $AS'G$ risultano complementari, da cui $G\widehat{S'}A$=90°.
C.v.d.