17 maggio 2021 – V Edizione

Gara di Matematica Premio Danti

Dipartimento di Matematica e Informatica

Università degli studi di Perugia

POSSIBILI SOLUZIONI DEI QUESITI PROPOSTE

1. CRUCINUMERICO

[1] 1	2	[2] 4	9	
0		6		
[3] 1	[4] 1	9		[5] 1
	[6] 8	8	8	0

1-O
1 cifra: sono 9 numeri (1,2,3,4,5,6,7,8,9)

2 cifre: 9 scelte per la cifra della decina e 9 (incluso lo 0) per la cifra dell'unità $9 \cdot 9 = 81$

3 cifre: 9 scelte per la cifra delle centinaia, 9 per la cifra delle decine e 8 per la cifra delle unità $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$

4 cifre tra 1000 e 1999: 1 scelta per la cifra delle migliaia, 9 scelte per la cifra delle centinaia, 8 per la cifra delle decine e 7 per la cifra delle unità $1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$

4 cifre tra 2000 e 2021: 1 scelta per la cifra delle migliaia, 1 scelta per la cifra delle centinaia, 1 scelta per la cifra delle decine e 7 scelte per la cifra delle unità $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 7 = 7$. Quindi i numeri che non hanno cifre ripetute sono $9 + 81 + 648 + 504 + 7 = 1249$.

1-V Il divisore comune maggiore di 1 di tutti i numeri di 4 cifre del tipo $abab$ con $1 \leq a \leq 9$ e $1 \leq b \leq 9$ è 101. Infatti se Dividiamo $abab$ per ab otteniamo 101, quindi $abab = 101 \cdot ab$ da cui si deduce quanto affermato sopra.

6-O Sia n il più grande numero che è prodotto di due numeri di cui uno p palindromo e una potenza quarta q, quindi $n = p \cdot q$. Si hanno due casi possibili.

Caso 1: I resti delle divisioni di 2021 per p e per q sono rispettivamente 356 e 5 . In questo caso p è il più grande palindromo che divide $2021-356=1665$ e q la più grande potenza quarta che divide $2021-5=2016$. Scomponendo entrambi i numeri in fattori primi si ha che $1665=3^2\cdot 5\cdot 37$ da cui si deduce che $p=555$ e che $2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7$, quindi $q=16$. In questo caso si ottiene $n=555\cdot 16=8880$

Caso 2: I resti delle divisioni di 2021 per p e per q sono rispettivamente 5 e 356 . In questo caso p è il più grande palindromo che divide 2016 e q è la più grande potenza quarta che divide 2016 . Considerando le scomposizioni la più grande potenza quarta che divide 2016 è 1 , quindi $n=p$ con p palindromo e divisore di 2016 . Tale numero è ovviamente minore di 8880, pertanto il numero cercato è 8880.

3-O Indichiamo con x l'inverso di 13 modulo 11 e con y l'inverso di 11 modulo 13 . Per il teorema cinese dei resti, il numero cercato è il resto della divisione di $9\cdot 13\,x+2\cdot 11\,y=117\,x+22\,y$ per $11\cdot 13=143$. Poiché $13=2(mod\,11)$, è immediato dedurre che $x=6$. Quindi il numero cercato è il resto della divisione di $117\cdot 6+22\cdot 6$ per 143 . Si trova quindi $n=119$.

5-V $n^a+n^b=n^c$ con $n>0\,e\,a,b,c\geq 0$. Per $n=1$ non ci sono quaterne $(1,a,b,c)$ che soddisfano la relazione. Supponiamo $a>b$ quindi $n^b(n^{a-b}+1)=n^c$ da cui segue che $n^{a-b}+1$ è multiplo di n, ma questo è impossibile perché il resto della divisione di $n^{a-b}+1$ per n è 1. Poiché il caso $a<b$ è analogo, necessariamente $a=b$ da cui di ricava che $2n^a=n^c$ quindi $2=n^{c-a}$. Perciò $n=2$ e $c=a+1$. Le quaterne che verificano la relazione sono del tipo $(2,a,a,a+1)$ dove $2^{a+1}<2021<2^{11}$, da cui si ottiene $a<10.$ Le possibili quaterne sono quindi 10.

4-V 18

2-V 4698

2. CALENDARI POLINOMIALI

Possiamo notare che $P(0)=0$. Poiché $P(x^2)=x^{2021}(x+1)P(x)$, allora $P(x)=x^n Q(x)$ con $Q(x)\neq 0$ e tale che $\overset{P(x)}{deg\,deg(Q(x))<deg}$ ¿ .

Sostituendo $P(x)$ nell'uguaglianza si trova che $x^{2n}Q(x^2)=x^{2021+n}(x+1)Q(x)$ quindi $n=2021$. Il polinomio $Q(x)$ è tale che $Q(x^2)=(x+1)Q(x)$, inoltre possiamo notare che $Q(1)=0$ poiché $Q(1)=2Q(1)$. Possiamo scrivere quindi il polinomio $Q(x)$ come $Q(x)=(x-1)R(x)$ con $R(x)\neq 0$ e $deg\,deg(R(x))<deg\,¿\,Q(x)$). Allora $(x^2-1)R(x^2)=(x+1)(x-1)R(x)$, quindi $R(x^2)=R(x)$, ciò implica che $R(x)=c$ poiché $deg\,deg(R(x^2))=deg\,deg(R(x))$. Il polinomio $P(x)$ sarà $P(x)=c\,x^{2021}(x-1)$, sappiamo che $2^{-1847}=P\left(\frac{1}{2}\right)$ da cui troviamo che $2^{-1847}=\frac{-c}{2^{2022}}$ quindi $c=-2^{175}$. Il polinomio cercato è $P(x)=-2^{175}x^{2021}(x-1)$

3. IL SOGNO DI EGNAZIO

Indichiamo con **L** l'insieme $L=\{l\,\text{è una retta del piano}\}$ e con L la sua cardinalità, indichiamo con L_i l'insieme $L_i=\{|l\cap A|=i\}$ con $i=0,\dots,q+1$, e con l_i la sua cardinalità.

Possiamo provare che $L=\sum_{i=0}^{q+1} l_i$. È ovvio che $L_i\subseteq L$ poiché le rette che appartengono ad ogni insieme L_i sono rette del piano, quindi appartengono a $L.$ Dobbiamo far vedere che $L=L_0\cup L_1\cup\ldots\cup L_{q+1}$ e che scelti due indici i,j tali che $i\neq j$ $l_i\cap l_j=\varnothing$ **.** Fissiamo $l\in L$, allora esisterà un indice $i\in\{0,\dots,q+1\}$ tale che $|l\cap A|=i$, quindi $l\in L_i$. Se $l\in L_i$ e $l\in L_j$ allora $|l\cap A|=i$ e $|l\cap A|=j$, quindi necessariamente $i=j$.

Poiché gli insiemi L_i sono disgiunti, la cardinalità di **L** è somma delle cardinalità degli L_i con $i=0,\dots,q+1$, quindi $L=\sum_{i=0}^{q+1} l_i=q^2+q+1$ poiché tutte le rette del piano sono in numero uguale a q^2+q+1 con $q\geq 2$.

Per provare che $\sum_{i=0}^{q+1} i\,l_i=k(q+1)$ procediamo con un doppio conteggio. Consideriamo il seguente insieme $B=\{P\in A, l\in L, P\in l\}$.

Per prima cosa procediamo nel conteggio fissando il punto P, sappiamo che per ogni punto passano esattamente $q+1$ rette e, poiché la cardinalità di A è uguale a k ottengo che l'insieme B ha cardinalità $k(q+1)$.

Ora contiamo la cardinalità dell'insieme fissando una retta del piano l.

Possiamo notare che l'insieme B può essere scritto come unione di insiemi disgiunti, quindi

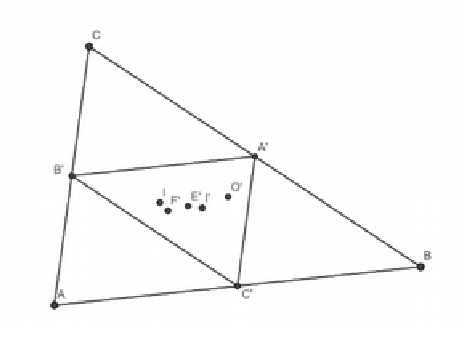
$$B=\{P\in A, l\in L_0\}\cup\{P\in A, l\in L_1\}\cup\ldots\cup\{P\in A, l\in L_{q+1}\}.$$

Per ogni $i=0,\ldots,q+1$; considero $\{P\in A, l\in L_i\}$, per ogni $l\in L_i$, $l\cap L_i=\{P_1,\ldots,P_i\}$ quindi la cardinalità di questo insieme è $i\,l_i$.

Si ottiene quindi $\sum_{i=0}^{q+1} i\,l_i=k(q+1)$.

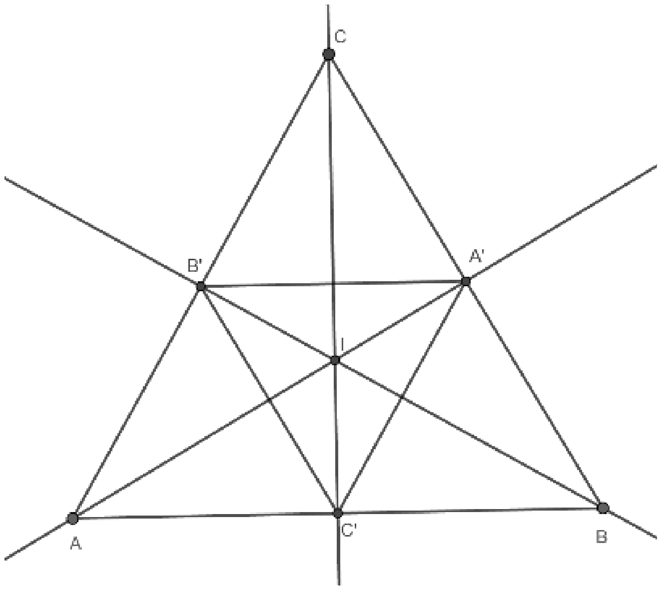
4. PIASTRELLE TRIANGOLARI

Sia ABC un triangolo e $A'B'C'$ il triangolo che ha per vertici i punti medi dei lati del triangolo ABC. Considerato un triangolo qualunque, l'incentro I del triangolo ABC non coincide con i punti notevoli del triangolo $A'B'C'$ come possiamo vedere in figura dove con I', O', E' e F' indichiamo rispettivamente l'incentro, l'ortocentro, il baricentro e il circocentro di $A'B'C'$.



L'incentro I di ABC coincide con l'incentro I' di $A'B'C'$ se e solo se ABC è equilatero.

Se ABC è equilatero allora $I=I'$.



Se $I=I'$ proviamo che ABC è equilatero. Indichiamo con $2\alpha, 2\beta$ e 2γ rispettivamente gli angoli $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, ABC e $A'B'C'$ sono simili, quindi $\hat{A}'=2\alpha, B'=2\beta$ e $\hat{C}'=2\gamma$. Il segmento CB è parallelo a $C'B'$ quindi $A'B'C=2\alpha$, analogamente $C'A'B=2\gamma$ e $AC'B'=2\beta$. Possiamo notare che C, I e C' sono allineati, infatti $\widehat{CIB'}=\gamma+\beta$, $\widehat{B'IA}=\alpha+\beta$, $\widehat{AIC}'=\alpha+\gamma$. Consideriamo i triangoli $CA'I$ e $CB'I$, i due triangoli sono congruenti poiché hanno tutti e tre gli angoli congruenti e un lato in comune, analogamente per $AC'I$ e $AB'I$ e per $C'BI$ e $BA'I$. Ne segue che ABC è equilatero.