



16 febbraio 2018 – II Edizione

Gara di Matematica Premio Danti

Dipartimento di Matematica e Informatica

Università degli studi di Perugia

1. Non sfogliate il fascicolo finché non vi viene detto di farlo. Nel foglietto piegato trovate il vostro **numero identificativo**, in modo tale da rendere la correzione dell'elaborato del tutto anonima. **Annotatelo nell'apposito riquadro e in basso a destra in ogni pagina.**
2. La prova consiste in 7 quesiti, suddivisi in due sezioni.
La prima parte è costituita da tre problemi, ciascuno vale 6 punti. Affinché venga valutata la seconda parte è necessario raggiungere un punteggio maggiore o uguale a 12 punti.
3. La seconda parte comprende 4 problemi, ciascuno dei quali vale 8 punti. Ai fini della classifica verrà considerato solamente il punteggio ottenuto in questa sezione.
4. Ciascun problema prevede una argomentazione o dimostrazione, le soluzioni dovranno essere formulate in modo chiaro utilizzando gli spazi appositi.

NUMERO IDENTIFICATIVO

I PARTE

1. COMBINAZIONI DI ETA'

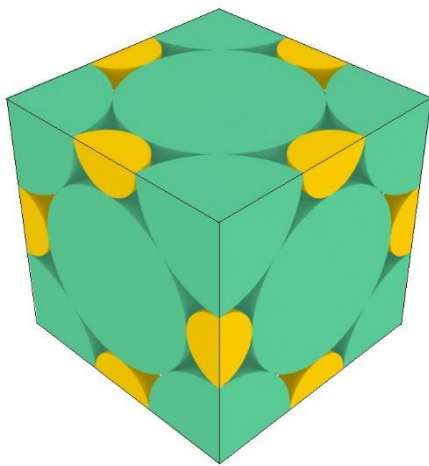
Egnazio non conosce le età di tre sue parenti, Anna, Beatrice e Camilla, però ha due indizi: ognuna di loro ha meno di 50 anni e il quadrato della differenza di età di Anna e Beatrice sommato al prodotto tra la somma delle età di Camilla e Beatrice e la differenza delle loro età eguaglia il quadrato della differenza di età tra Anna e Camilla. Esprimendo le loro età attraverso le parti intere dei loro anni Egnazio riesce a conteggiare tutte le terne possibili. Quante ne trova?

Si ricorda che la parte intera di un numero reale non negativo x è il massimo numero intero minore o uguale a x .

2. SALE DA CUCINA

Egnazio è particolarmente affascinato dal reticolo cristallino del sale da cucina (NaCl) in cui ogni ione Cloro (sfera verde) è circondato da sei ioni Sodio (sfera gialla) e viceversa e le sfere sono a due a due tangenti. Egnazio cerca di riprodurre tale modello all'interno del cubo in figura le cui facce contengono i centri delle sfere che lo intersecano. Se indichiamo con R il raggio della molecola di Cloro e con r il raggio della molecola di Sodio, puoi aiutare Egnazio a scoprire il volume occupato dal sale contenuto nel cubo? Esprimere la soluzione in funzione di r .

Si ricorda che il volume di una sfera di raggio a è $\frac{4}{3}\pi a^3$



NUMERO IDENTIFICATIVO

3. DIMOSTRAZIONE SCOLORITA

Egnazio ha ritrovato una vecchia dimostrazione ma il tempo ha cancellato alcune parti, sapresti aiutarlo a ricostruirla?

TEOREMA

Un numero naturale a è divisibile per 7 se e solo se, nella sua scrittura posizionale in base dieci, il numero che si ottiene sottraendo il doppio della cifra dell'unità di a dal numero formato dalle cifre di a con l'omissione della cifra delle unità, è divisibile per 7.

DIMOSTRAZIONE

In generale possiamo scrivere $a = 10q + r$ con $\dots\dots\dots \leq r < \dots\dots\dots$

Nella scrittura posizionale in base dieci q è il numero formato dalle cifre di $\dots\dots\dots$ con l'omissione della cifra delle unità, la quale è $\dots\dots\dots$. Quindi l'enunciato diventa: un numero naturale è divisibile per 7 se e solo se lo è il numero $q - 2r$.

Ora dimostriamo la parte necessaria.

Supponiamo che $a = 10q + r$ con $\dots\dots\dots \leq r < \dots\dots\dots$ sia divisibile per 7, ossia che esista un h intero tale che $\dots\dots\dots$, allora si ha che $7h = \dots\dots\dots$ o in modo equivalente $r = \dots\dots\dots$

Sostituendo otteniamo che

$$q - 2r = \dots\dots\dots$$

Quindi $q - 2r$ è divisibile per 7.

Viceversa, supponiamo che $q - 2r$ sia divisibile per 7, ossia esista un k intero tale che

$$q - 2r = \dots\dots\dots, \text{ ciò significa che } q = \dots\dots\dots \text{ e quindi otteniamo che}$$

$$a = \dots\dots\dots$$

e quindi a è divisibile per 7.

II PARTE

4. CRUCINUMERICO

Egnazio è un appassionato di enigmistica, aiutalo a risolvere il seguente cruciverba numerico sapendo che (x, y) è una coppia di numeri naturali che soddisfano l'equazione $32x - 21y = 5$.

1	2	■	3	■
4				■
	■	■	■	5
	■	6		

ORIZZONTALI

1. y
4. Un numero naturale la cui somma delle cifre è 19
6. La somma di tutti i numeri di due cifre che verificano le seguenti proprietà:
 - a. è un numero primo
 - b. scambiando le cifre è ancora primo
 - c. il prodotto delle cifre è un numero primo

VERTICALI

1. Il più grande numero di quattro cifre tale che la somma con il suo palindromo, anch'esso di quattro cifre, è 9328
2. $2x - 8$
3. Il resto della divisione di $(303)^{303}$ per 17 sapendo che il resto della divisione di 5^5 per 17 è 14
5. x

5. NUMERI CIVICI

Egnazio invia una lettera ai suoi amici matematici in cui fissa un appuntamento per il venerdì della settimana successiva. Per evitare che le persone senza invito possano recarsi all'appuntamento, il luogo di incontro è via dei Priori al numero civico

$$a^{2018} + b^{2018} + c^{2018}$$

dove a, b e c sono interi con $c \neq 0$ e sono i coefficienti di due polinomi di terzo grado $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ e $g(x) = x^3 + bx^2 + cx + a$ che soddisfano le seguenti condizioni:

- $f(1) = 0$
- *le radici eventualmente complesse di $g(x)$ sono tutte e sole i quadrati delle radici eventualmente complesse di $f(x)$*

Riusciresti a scoprire il numero civico e a recarti all'appuntamento?

6. GIOCHI DOMENICALI

La famiglia Danti la domenica si ritrova dopo pranzo a giocare. Da un'urna contenente 90 palline numerate da 1 a 90 ne vengono estratte tre e si sommano i numeri ottenuti. Egnazio scommette su una somma pari, mentre Girolamo scommette su una somma divisibile per 3. Quante sono le combinazioni vincenti per Egnazio? E quante per Girolamo?

NUMERO IDENTIFICATIVO

7. DIMOSTRAZIONE

Nel suo soggiorno a Firenze Egnazio lavora all'università e sottopone ai suoi studenti il seguente teorema:

Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico e si indichi con E il punto di intersezione fra i prolungamenti dei segmenti AB e CD . Si consideri la circonferenza circoscritta ad ADE e si tracci la tangente ad essa in D : tale retta interseca la retta che contiene il segmento CB nel punto F . Dimostrare che il triangolo CDF è isoscele.

Uno studente fa notare ad Egnazio che manca una ipotesi. Aggiungi l'ipotesi mancante e dimostra il teorema.

NUMERO IDENTIFICATIVO