17 febbraio 2017 – I Edizione

Gara di Matematica Premio Danti

Dipartimento di Matematica e Informatica

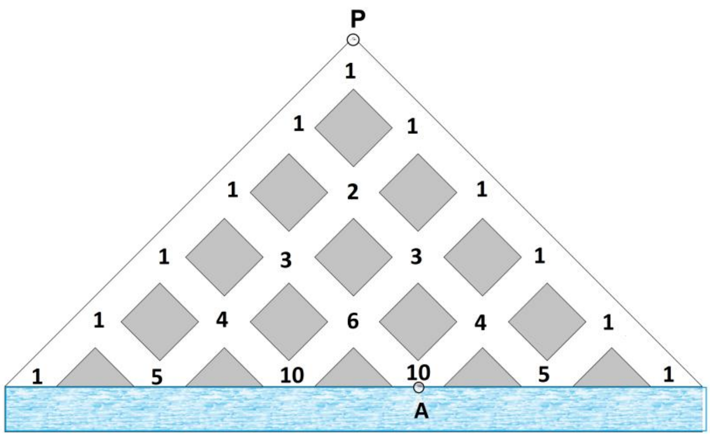
Università degli studi di Perugia

POSSIBILI SOLUZIONI DEI QUESITI PROPOSTI

I PARTE

1. PASSEGGIANDO CON EGNAZIO

Ad ogni bivio associamo un numero che corrisponde al numero di percorsi minimi che partono da P e permettono di raggiungere il bivio considerato. Quello che si ottiene è il triangolo di Tartaglia. I percorsi minimi che portano al fiume sono quindi 32 mentre i percorsi minimi possibili che portano ad A sono 10.



2. QUANTO ORO?

L'area del ciondolo è equivalente alla differenza fra l'area del cerchio e l'area del quadrato inscritto in esso, in altre parole $\pi r^2 - 2r^2$.

3. DIMOSTRAZIONE SCOLORITA

DEFINIZIONE
Ogni soluzione intera (x, y, z) di $x^2 + y^2 = z^2$ con x, y, z positivi si dice *terna pitagorica*. Se x, y, z sono primi fra loro la terna pitagorica si dice *primitiva*.

TEOREMA
Se esistono r, s interi positivi primi tra loro di cui uno pari e uno dispari tali che $x = r^2 - s^2$ $y = 2rs$ e $z = r^2 + s^2$, allora (x, y, z) è una terna pitagorica primitiva.

DIMOSTRAZIONE
Facciamo vedere che x, y, z sono una terna pitagorica, infatti
$x^2 + y^2 = (r^2 - s^2)^2 + (2rs)^2 = r^4 + s^4 - 2r^2s^2 + 4r^2s^2 = r^4 + s^4 + 2r^2s^2 = (r^2 + s^2)^2 = z^2$.
Per mostrare che sono una terna primitiva rimane da dimostrare che sono primi tra loro, cioè $MCD(x, y, z) = 1$. Dimostriamo intanto che $MCD(x, y) = 1$.

Poiché r ed s non sono entrambi pari o entrambi dispari, allora essendo

$x = r^2 - s^2 = (r - s)(r + s.)$, x è dispari. Dunque 2 non è fattore comune tra x e y.

Se $p \neq 2$ è un divisore primo comune tra x e y allora, se p divide y segue che p divide r oppure p divide s. Se p dividesse $x = r^2 - s^2$, allora p divide s implicherebbe p divide r e viceversa, contro l'ipotesi che r e s sono primi tra loro.

Questo è sufficiente per dimostrare l'enunciato, perché $MCD(x, y) = 1$ implica che

$MCD(x, y, z) = 1$.

II PARTE

4. CRUCINUMERICO

Iniziamo a svolgere il cruciverba partendo dalle definizioni non dipendenti da a e b, ad esempio la **7.** orizzontale. Ci chiede di trovare le soluzioni dell'equazione $(x-7)^{(x^2-19x+60)}=1$, questa uguaglianza è verificata se $x=6$, $x=8$, $x=4$ o $x=15$, la soluzione va espressa in somma di quadrati quindi $36+16+64+225=341$.
Per risolvere la **4.** orizzontale si può usare la seguente formula induttiva

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

quindi

$$\sum_{k=1}^{27} k^2 = \frac{27(28)(55)}{6} = 6930.$$

Risolviamo ora la **1.** verticale, scomponiamo i tre numeri:
$1850cd^2 = 5\cdot 11^2\cdot 3cd^2$, quindi per essere un minimo quadrato $c=15$;
$150de^2 = 3\cdot 5^2\cdot 2de^2$, perciò $b=6$;
$189ec^2 = 7\cdot 3^3 ec^2$, perciò $d=21$.
Da ciò otteniamo che $cde=1890$.
La **1.** orizzontale ci chiede di trovare un quadrato di tre cifre, poiché la prima cifra è 1 le possibilità per a^2 sono: $10^2=100$, $11^2=121$, $12^2=144$, $13^2=169$, $14^2=196$.

La **2.** verticale ci chiede il risultato di $10a$, poiché le possibilità per a sono $10,\ 11,\ 12,\ 13$ e 14 e hanno tutti come prima cifra 1 necessariamente $a=11$, quindi $a^2=121$.

A questo punto la **3.** orizzontale non può che essere 16 e automaticamente possiamo calcolare la **5.** verticale che risulta essere 41 e la **6.** verticale è 2.

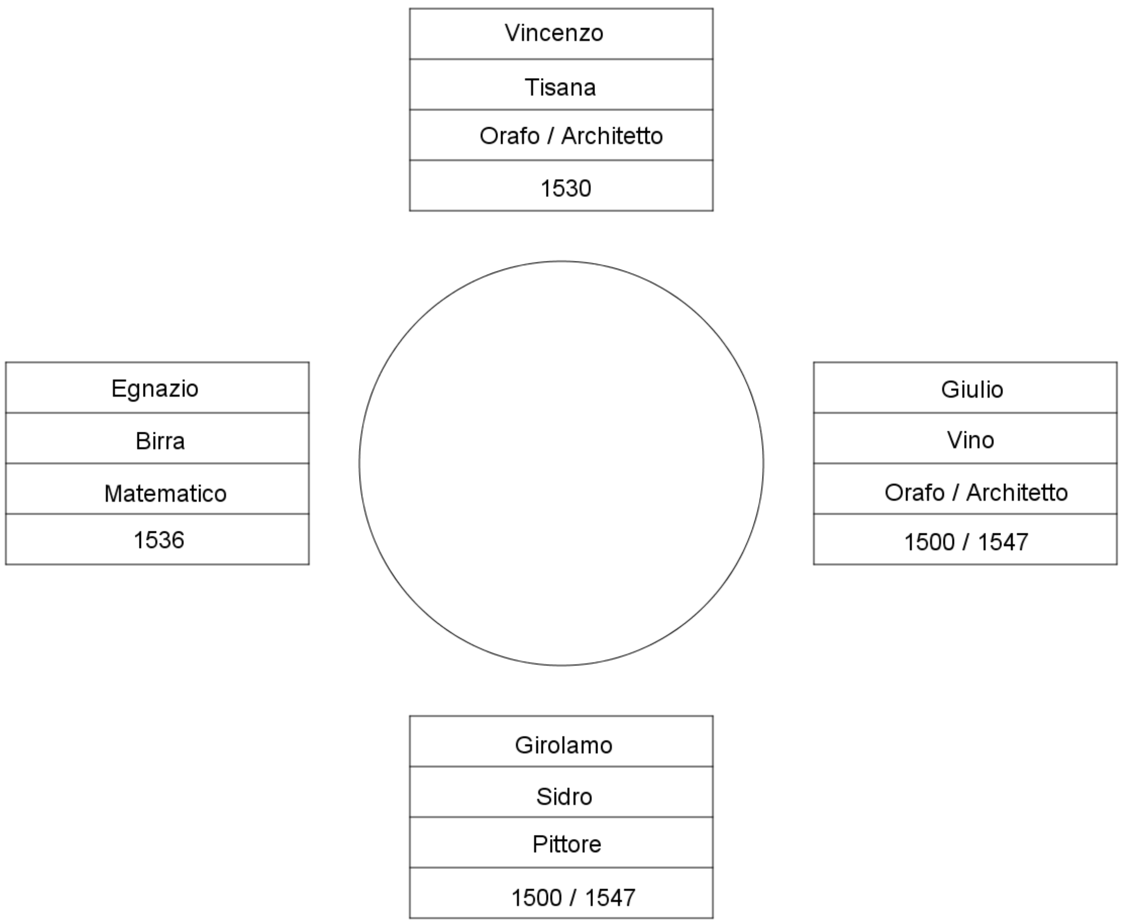
■	[1] 1	2	[2] 1	■
■	8	■	[3] 1	6
[4] 6	9	3	0	■
■	0	■	■	[5] 4
[6] 2	■	[7] 3	4	1

5. IL COMPLEANNO DI EGNAZIO

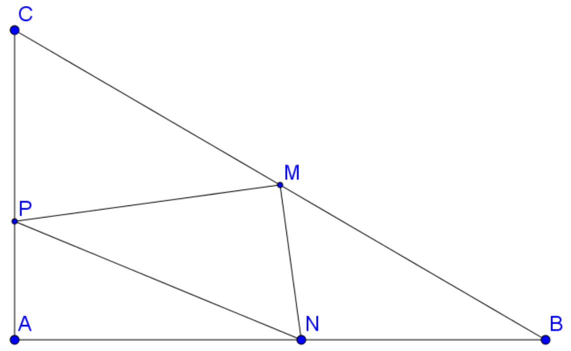
Sono 10 i modi di sistemare i tre gemelli rispettando la condizione che due di loro non possono sedersi mai vicini. Sono 3! i modi possibili per permutare i gemelli e 4! i modi possibili per sistemare gli altri 4 partecipanti. I possibili modi per sistemare i 7 partecipanti sono quindi $1440 = 10 \cdot 4! \cdot 3!$.

6. CHI È NATO NEL 1536?

Dall'informazione 2. sappiamo che Vincenzo beve la tisana, dalla 5. Girolamo è seduto tra chi beve vino e birra, pertanto beve il sidro.
Automaticamente otteniamo che il matematico beve birra perché, dalla 3., sta a sinistra di chi beve sidro, quindi il matematico è seduto alla sinistra di Girolamo e alla destra di Vincenzo.
Vincenzo non può essere nato nel 1547 ne nel 1500 per le proprietà 1. e 6. rispettivamente. A questo punto dobbiamo collocare Egnazio e Giulio effettuando una scelta.
Se Giulio fosse matematico allora otterremmo che Girolamo, dalla proprietà 4., è nato nel 1530 quindi poiché Vincenzo non può essere nato negli altri due anni sarà nato nel 1536. Dalla 7. otterremmo che Vincenzo è pittore, automaticamente dalla 6. Girolamo è architetto e Giulio è nato nel 1500. Per esclusione Egnazio risulta essere nato nel 1547 ed è orafo, raggiungendo l'assurdo per la proprietà 1.
Automaticamente Egnazio è il matematico allora Vincenzo è nato nel 1530, Girolamo risulta essere il pittore. Non è possibile stabilire se Giulio è orafo o architetto, ma in entrambi i casi risulta che Egnazio è nato nel 1536.



7. DIMOSTRAZIONE



Si consideri il quadrilatero $MPAN$, esso è ciclico poiché la somma degli angoli opposti è pari a $180°$: $\widehat{NAP}$ e $\widehat{NMP}$ sono retti.

L'angolo $\widehat{MNP}$ è congruente all'angolo $\widehat{MAP}$ poiché insistono sullo stesso arco PM.

Ricordando che il circocentro di un triangolo rettangolo coincide con il punto medio dell'ipotenusa otteniamo che $AM = CM$ da cui si deduce che $\widehat{MAP} = \widehat{ACB} = \widehat{PNM}$ e da ciò otteniamo la tesi.