

17 febbraio 2017 – I Edizione



Gara di Matematica Premio Danti

Dipartimento di Matematica e Informatica

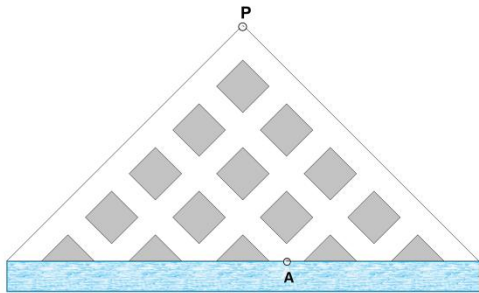
Università degli studi di Perugia

1. Non sfogliate il fascicolo finché non vi viene detto di farlo. Nel foglietto piegato trovate il vostro numero identificativo, in modo tale da rendere la correzione dell'elaborato del tutto anonima. Annotatelo nell'apposito spazio in basso a destra in ogni pagina.
2. La prova consiste in 7 quesiti, suddivisi in due parti.
La prima parte è costituita da tre problemi, ciascuno vale 6 punti. Affinché venga valutata la seconda parte è necessario raggiungere un punteggio maggiore o uguale a 12 punti nella prima parte.
La seconda parte comprende 4 problemi, ciascuno dei quali vale 8 punti. Ai fini della classifica verrà considerato solamente il punteggio ottenuto in questa sezione.
3. Ciascun problema prevede una argomentazione, dimostrazione o completamento. Le soluzioni dovranno essere formulate in modo chiaro utilizzando gli spazi appositi.
4. Durante i primi 30 minuti è consentito porre domande per chiarimenti sul testo della gara, dopo non sarà più possibile.

I PARTE

1. PASSEGGIANDO CON EGNAZIO

Egnazio decide di fare una passeggiata e di raggiungere il fiume Tevere. Parte dalla città di Perugia che indichiamo con P e ha a disposizione la seguente mappa. Dalla posizione P tutte le strade portano al fiume, ma Egnazio vuole seguire il percorso più breve: quanti sono i possibili percorsi? Se decidesse di fare una gita in barca che si trova in A, quanti sono i possibili percorsi minimi da P?



2. QUANTO ORO?

Tra qualche settimana è il compleanno di Egnazio, i suoi fratelli vorrebbero regalargli un ciondolo ispirato al suo strumento come quello riportato in figura in colore grigio. Se r è il raggio del ciondolo e $\frac{r}{2}$ il raggio delle circonferenze che si intersecano nel centro del cerchio, quanto misura l'area del ciondolo che dovranno realizzare?



3. DIMOSTRAZIONE SCOLORITA

Egnazio ha ritrovato una vecchia dimostrazione ma il tempo ha cancellato alcune parti, sapresti aiutarlo a ricostruirla?

DEFINIZIONE

Ogni soluzione intera (x, y, z) di $x^2 + y^2 = z^2$ con x, y, z positivi si dice *terna pitagorica*. Se x, y, z sono primi fra loro la terna pitagorica si dice *primitiva*.

TEOREMA

Se esistono r, s interi positivi primi tra loro di cui uno pari e uno dispari tali che $x = r^2 - s^2$, $y = 2rs$ e $z = r^2 + s^2$, allora (x, y, z) è una terna pitagorica primitiva.

DIMOSTRAZIONE

Facciamo vedere che x, y, z sono una terna pitagorica, infatti

$$x^2 + y^2 = \dots\dots\dots$$

Per mostrare che sono una terna primitiva rimane da dimostrare che sono primi tra loro, cioè $MCD(x, y, z) = 1$. Dimostriamo intanto che $MCD(x, y) = 1$.

Poiché r ed non sono entrambi pari o entrambi dispari, allora essendo

$$x = r^2 - s^2 = (\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots), \quad x \text{ è } \dots\dots\dots \text{ Dunque } \dots\dots\dots \text{ non è fattore comune tra } x \text{ e } y.$$

Se $p \neq 2$ è un divisore primo comune tra x e y allora, se p divide y segue che oppure Se p dividesse $x = r^2 - s^2$, allora p divide s implicherebbe e viceversa, contro l'ipotesi che e sono primi tra loro.

Questo è sufficiente per dimostrare l'enunciato, perché $MCD(x, y) = 1$ implica che

II PARTE

4. CRUCINUMERICO

Risolvere il seguente cruciverba numerico sapendo che a e b sono numeri naturali.

■	1		2	■
■		■	3	
4				■
■		■	■	5
6	■	7		

ORIZZONTALI

1. Il quadrato di a
3. Il quadrato di b
4. La somma dei primi 27 quadrati
7. La somma dei quadrati delle soluzioni dell'equazione $(x - 7)(x^2 - 19x + 60) = 1$.

VERTICALI

1. Il prodotto cde , dove c, d, e sono i minimi numeri naturali tali che $1815cd^2$, $150de^2$ e $189ec^2$ sono quadrati.
2. $10a$
5. $3a + 2b$
6. \sqrt{b}

MOTIVARE LE RISPOSTE

5. IL COMPLEANNO DI EGNAZIO

Per festeggiare il compleanno di Egnazio i suoi genitori organizzano uno spettacolo teatrale e invitano tre suoi amici che sono gemelli. Allo spettacolo partecipano, oltre a Egnazio, i suoi genitori, suo fratello Vincenzo e i 3 gemelli. Vengono disposte 7 sedgiole in una unica fila. Ognuno può sedersi dove vuole a patto che mai due gemelli, essendo particolarmente vivaci, siedano vicini. In quanti modi si possono sedere?

6. CHI È NATO NEL 1536?

Dopo cena i quattro uomini della famiglia Danti, Egnazio, Girolamo, Giulio e Vincenzo, si ritrovano intorno ad una tavola rotonda a conversare davanti alle loro differenti bevande. Ciascuno, nella propria vita, si è appassionato ad una arte o scienza diversa e sono nati in anni diversi. Sappiamo che:

- 1. Chi è orafo è seduto alla destra di chi è nato nel 1547*
 - 2. Vincenzo beve una tisana*
 - 3. Chi è matematico è seduto alla sinistra di chi beve sidro*
 - 4. Egnazio è seduto alla destra di chi è nato nel 1530*
 - 5. Girolamo è seduto a destra di chi beve birra e a sinistra di chi beve vino*
 - 6. Chi è architetto sta a destra di chi è nato nel 1500*
 - 7. Giulio sta a destra del pittore*
- Chi è nato nel 1536?*

7. DIMOSTRAZIONE

Sia ABC un triangolo rettangolo in A . Si consideri sul cateto AB un punto N e si tracci la retta MN , dove M è il punto medio del lato BC . Da M si conduca la perpendicolare a NM fino ad intersecare AC in P .

Si dimostri che i triangoli ABC e MNP sono simili.