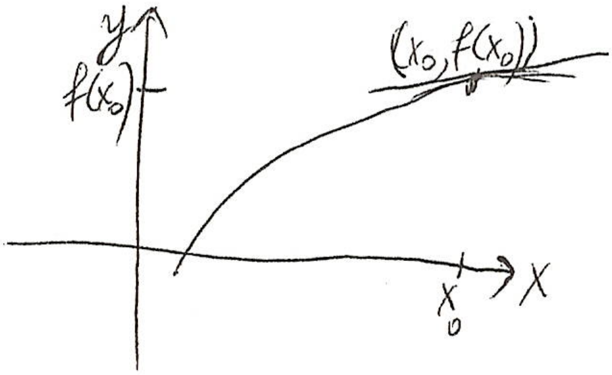
APPLICAZIONI DELLE SERIE:

$\boxed{\text{LA POESIA DELLE SERIE DI TAYLOR}}$

Le serie di Taylor servono per tantissimi scopi, tra cui:

1) APPROSSIMARE una funzione "regolare" (cioè avente derivata prima, seconda, ..., n-esima, ..) mediante polinomi
2) CALCOLARE numeri irrazionali (ad esempio π, e, $\sqrt{5}$ ...) fino alla k-sima cifra decimale esatta
3) Calcolare LIMITI e determinare il comportamento asintotico di una funzione, nel caso $\frac{0}{0}$, con metodi spesso più veloci di quelli che fanno uso della regola de l'Hôpital (che spesso deve essere applicata più di una volta)

La formula di Taylor, ricavata nel testo più avanti, e che costituisce la poesia delle serie di Taylor, con la quale una funzione sufficientemente "regolare" (in inglese, "smooth") viene approssimata **BENE** da un polinomio di grado n, nasce dall'idea di (in un certo senso) "iterare" il processo di derivata, con riferimento particolare al suo SIGNIFICATO GEOMETRICO: infatti l'esistenza della retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$ sta a indicare



una buona approssimazione, in un interno del punto x_0, della curva $y = f(x)$ con la corrispondente retta tangente. Il punto scelto x_0 è un punto **FISSATO**, che costituisce il nostro punto di partenza. Per $x_0 = 0$, avremo le SERIE DI MCLAURIN. Noi sostanzialmente consideriamo quasi sempre serie di McLaurin. Facciamo ora il discorso in generale, partendo dalla definizione di derivata nel punto x_0, e sia $L = f'(x_0)$.

Definizione di derivata:

$\exists L \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L \qquad L=f'(x_0)$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - L\right) = 0$$

chiamiamolo $\varepsilon(h) = \varepsilon(x_0, h)$

$\exists$ un intorno $\mathcal{U}$ del punto 0, $\mathcal{U}$, tale che, $\forall h \in \mathcal{U}$, si ha (con $h \neq 0$)

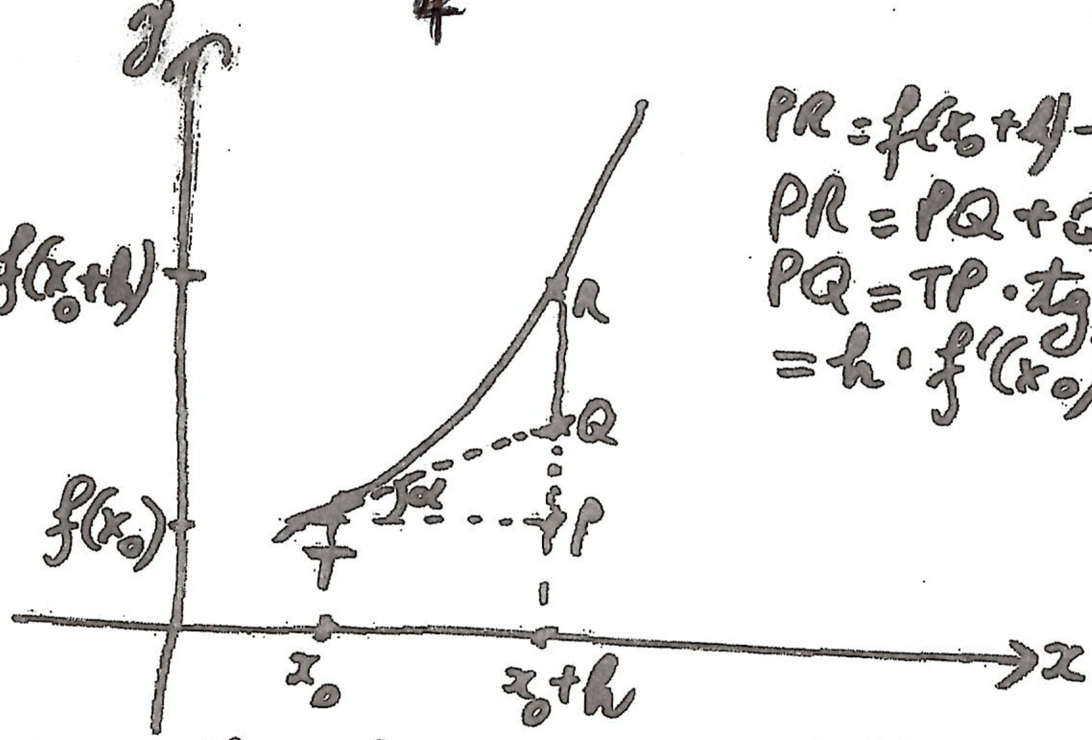
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - L = \varepsilon(h) \quad \text{ove}$$

$\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, cioè

$$f(x_0+h)-f(x_0)-Lh = h\cdot\varepsilon(h)$$

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + Lh + h\cdot\varepsilon(h)}$$

$f(x_0+h)$ si approssima con $f(x_0)+L\cdot h = f(x_0)+f'(x_0)\cdot h$, che è un polinomio di 1° grado, ed $h\cdot\varepsilon(h)$ è una **BUONA** approssimazione, perché $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$.



$PR = f(x_0+h) - f(x_0)$

$PR = PQ + QR$

$PQ = TP \cdot tg\,\alpha = h \cdot f'(x_0) = h \cdot L$

$tg\,\alpha$ = coefficiente angolare della retta TQ = coefficiente angolare della retta tangente $= f'(x_0)$ QR sarà $h \cdot \varepsilon(h)$ = quantità trascurabile, perché $h \cdot \varepsilon(h)$ tende a 0 <u>PIÙ VELOCEMENTE di h</u> perché $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. Si dice anche $h \cdot \varepsilon(h) = o(h)$ = più <u>velocemente di h</u>

$$f(x_0+h) - f(x_0) \approx PQ$$

Abbiamo approssimato la f con una retta, cioè con un polinomio di 1° grado. Una migliore approssimazione, se la f è regolare (= smooth), la si può fare con un polinomio di grado n: è questo lo spirito della formula di TAYLOR

Come facciamo? Intanto, per semplicità, prenderemo (e lo faremo sostanzialmente <u>sempre</u>) $x_0 = 0$ (in letteratura, la formula di <u>Taylor</u> con $x_0 = 0$ si chiama <u>FORMULA DI MCLAURIN</u>). Dunque si ha

$$f(h) - f(0) = h \cdot f'(0) + h \cdot \varepsilon(h), \text{ ossia}$$

$$\underbrace{f(h)}_{\text{funzione}} = \underbrace{f(0) + h \cdot f'(0)}_{\text{polinomio di 1° grado in } h} + \underbrace{h \cdot \varepsilon(h)}_{\text{resto}} \qquad \text{con } \boxed{\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0}$$

Per avere un'approssimazione migliore, più precisa, con polinomi di 2° grado, 3° grado, ..., grado n, ... supporremo che la nostra f abbia derivata fino al 2° ordine, 3° ordine, ..., ordine n, ... quello che ci serve e si può vedere che valgono le seguenti formule (di McLaurin):

$$f(h) = \underbrace{f(0) + h \cdot f'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(0)}_{\text{polinomio di 2° grado in } h} + \underbrace{h^2 \cdot \tau(h)}_{\text{resto}} \qquad \text{con } \boxed{\lim_{h \to 0} \tau(h) = 0}$$

$$f(h) = f(0) + h \cdot f'(0) + h^2 \cdot \frac{f''(0)}{2!} + h^3 \cdot \frac{f'''(0)}{3!} + \dots + h^n \cdot \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \underbrace{h^n \cdot \xi(h)}_{\text{resto}},$$

ove $\boxed{\lim_{h \to 0} \xi(h) = 0}$. Le quantità $h^2 \cdot \tau(h), \dots, h^n \cdot \xi(h)$ vengono dette <u>RESTO DI PEANO</u>, e si indicano anche con il simbolo $o(h^2), \dots, o(h^n)$ [o si pronuncia "o piccolo"]: questo simbolo indica una quantità che tende a 0 <u>strettamente più velocemente</u> di h^2, oppure h^n, cosa che nel nostro contesto è garantita dal fatto che $\lim_{h \to 0} \tau(h) = 0$ e che $\lim_{h \to 0} \xi(h) = 0$.

(ciò vuol dire "infinitesimo di ordine superiore")

FUNZIONE = POLINOMIO DI TAYLOR + RESTO (DI PEANO)

Nelle nostre considerazioni, riveste fondamentale importanza quello che si chiama <u>o piccolo</u>.

Diremo che f è un <u>o piccolo</u> di g (oppure è un <u>o piccolo</u> rispetto a g) per x che tende a x_0 (nei nostri casi, sostanzialmente, per x che tende a 0), e scriveremo $\boxed{f(x) = o(g(x))}$

se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ $\quad \left(\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \right)$ (*)

N.B.: Per $x \to 0$, si prendono come f e g delle quantità che tendono a 0. Quindi, scrivere $f(x) = o(g(x))$ per $x \to 0$ vuol dire che $f(x)$ è un <u>infinitesimo di ordine SUPERIORE</u> rispetto a $g(x)$ per x che tende a 0. Superiore e <u>non</u> uguale, perché il limite considerato in (*) è <u>proprio 0</u>.

Naturalmente, $x^2 = o(x)$, perché $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$.

[Se uno vuole vedere altre relative "curiosità", può consultare la pagina web

youmath.it/lezioni/analisi-matematica/limiti-continuita-e-asintoti/3247-o-piccolo.html]

SVILUPPABILITÀ IN SERIE DI TAYLOR

Riconsideriamo la formula di Taylor (con il resto R_n di PEANO) (*) $f(h)=f(0)+h\cdot f'(0)+h^2\cdot\frac{f''(0)}{2!}+\ldots+$

$+h^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+\underbrace{o(h^n)}_{\text{"}R_n\text{"}}$, oppure, il che è la STESSA COSA,

(*) $f(x)=f(0)+x\cdot f'(0)+x^2\cdot\frac{f''(0)}{2!}+\ldots+x^n\cdot\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+R_n$ ($o(x^n)$)

(FUNZIONE = POLINOMIO DI GRADO n + QUANTITÀ TRASCURABILE)

Se la formula (*) "vale fino all' infinito", cioè se il polinomio (di Taylor) di grado n presente in (*) può essere sostituito da una serie senza che ci sia più il termine R_n, cioè se

$$f(h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n\cdot f^{(n)}(0)}{n!}\quad \left(\text{ovvero, } f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\cdot f^{(n)}(0)}{n!}\right)$$

con la convenzione $0!=1$, $f^{(0)}=f$, $0^0=1$ ("volo pindarico" che va bene solo NELLE SERIE: infatti, NEI LIMITI, 0^0 è una FORMA INDETERMINATA!!), allora si dice che

f è SVILUPPABILE IN SERIE DI TAYLOR

in un opportuno intorno del punto 0.

<u>N.B.:</u> <u>Non tutte</u> le funzioni che ammettono derivata di ogni ordine n sono sviluppabili in serie di Taylor (si possono dare esempi, ma ciò esula dal nostro corso). Qualche pagina avanti, daremo alcuni esempi di funzioni che <u>sono</u> sviluppabili in serie di Taylor (anche se <u>non</u> dimostriamo la sviluppabilità in serie di Taylor).

Abbiamo il seguente sviluppo in serie di Taylor (dell'esponenziale) (Mc Laurin)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

"Verifichiamo" il termine di destra (cioè la serie): ma attenzione! Non è una vera e propria dimostrazione (della sviluppabilità in serie di Taylor) ma solo un calcolo "empirico, formale". Si vuole dire:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^{(n)}(e^x)|_0 \cdot x^n}{n!}$$ ove il simbolo $D^{(n)}(e^x)|_0$

vuol dire "derivata n-esima della funzione esponentiale calcolata nel punto 0", che corrisponde al simbolo $f^{(n)}(0)$ ("derivata n-esima di f calcolata nel punto 0") con la convenzione di porre $f^{(0)}(0) = f(0)$, e in particolare $D^{(0)}(e^x)|_0 = e^0 = 1$: cioè, per definizione, la derivata di ordine 0 di una funzione f è la funzione f stessa. Si ha:

$D^{(0)}(e^x)|_0 = e^0 = 1 \quad 0! = 1 \quad x^0 = 1$ (n.d.: per convenzione, anche 0^0 <u>NELLE</u> <u>SERIE</u> fa 1, mentre 0^0 nei limiti è una forma indeterminata)

quindi $\dfrac{D^{(0)}(e^x)|_0 \cdot x^0}{0!} = 1$ Inoltre si ha: $D'(e^x) = e^x$, $D''(e^x) = e^x$, e così via $D^{(n)}(e^x) = e^x$, quindi $D^{(n)}(e^x)|_0 = e^0 = 1$

Pertanto, $e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

Adesso vediamo lo sviluppo in serie di Taylor (McLaurin) della funzione seno

$D^{(0)}(\sin x)|_0 = \sin x|_0 = \sin 0 = 0$

$D^{I}(\sin x)|_0 = D(\sin x)|_0 = \cos x|_0 = \cos 0 = 1$

$D^{II}(\sin x)|_0 = D(D(\sin x))|_0 = D(\cos x)|_0 = -\sin x|_0 = -\sin 0 = 0$

$D^{III}(\sin x)|_0 = D(D^{II}\sin x)|_0 = D(D(\cos x))|_0 = D(-\sin x)|_0 =$
$= -\cos x|_0 = -\cos 0 = -1$

$D^{IV}(\sin x)|_0 = D(D^{III}\sin x)|_0 = D(D^{II}\cos x))|_0 = D(D^{I}(-\sin x))|_0 =$
$= D(-\cos x)|_0 = \sin x|_0 = \sin 0 = 0$

Notiamo che $D^{I}(\sin x) = \cos x$, $D^{II}(\sin x) = -\sin x$, $D^{III}(\sin x) = -\cos x$, $D^{IV}(\sin x) = \sin x$ $(= D^{(0)}\sin x)$ si ritorna alla funzione di partenza; quindi, detto in modo semplice, "siamo davanti a un ciclo che si ripete ogni 4 passi"; ciò vuol dire $D^{V}(\sin x) = \cos x$, $D^{VI}(\sin x) = -\sin x$, $D^{VII}(\sin x) = -\cos x$, $D^{VIII}(\sin x) = \sin x$, e così via,
$D^{V}(\sin x)|_0 = \cos 0 = 1$, $D^{VI}(\sin x)|_0 = -\sin 0 = 0$, $D^{VII}(\sin x)|_0 = -\cos 0 = -1$, $D^{VIII}(\sin x)|_0 =$
$= \sin 0 = 0$. E così via.

Dunque, considerando lo sviluppo in serie del seno (McLaurin), si ha

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} D^{(n)}(\sin x)|_0 \cdot \frac{x^n}{n!} = D^{(0)}(\sin x)|_0 \cdot \frac{x^0}{0!} + D^{I}(\sin x)|_0 \cdot \frac{x^1}{1!} +$$
$$+ D^{II}(\sin x)|_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + D^{III}(\sin x)|_0 \cdot \frac{x^3}{3!} + D^{IV}(\sin x)|_0 \cdot \frac{x^4}{4!} + D^{V}(\sin x)|_0 \cdot \frac{x^5}{5!} +$$
$$+ D^{VI}(\sin x)|_0 \cdot \frac{x^6}{6!} + D^{VII}(\sin x)|_0 \cdot \frac{x^7}{7!} + D^{VIII}(\sin x)|_0 \cdot \frac{x^8}{8!} + \ldots =$$
$$= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + 0 + \ldots$$

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots}$$

Qual è il termine successivo? $\frac{x^9}{9!}$ e poi $-\frac{x^{11}}{11!}$, e così via

Per ricordarsi: il seno è una funzione dispari, ci sono solo i termini "di posto dispari", si parte da x, e "i coefficienti" sono alternativamente 1 e -1...

Analogamente si procede se si vuole considerare lo sviluppo in serie di McLaurin della funzione coseno

$D^{(0)}(\cos x) = \cos x$, $D^{(0)}(\cos x)|_0 = \cos 0 = 1$

$D^{I}(\cos x) = D(\cos x) = -\sin x$, $D^{I}(\cos x)|_0 = -\sin x|_0 = -\sin 0 = 0$

$D^{II}(\cos x) = D(-\sin x) = -\cos x$, $D^{II}(\cos x)|_0 = -\cos x|_0 = -\cos 0 = -1$

$D^{III}(\cos x) = D(D^{II}\cos x) = D(-\cos x) = \sin x$, $D^{III}(\cos x)|_0 = \sin x|_0 = \sin 0 = 0$

$D^{IV}(\cos x) = D(D^{III}\cos x) = D(\sin x) = \cos x$, $D^{IV}(\cos x)|_0 = \cos x|_0 = \cos 0 = 1$

Come nel caso dello sviluppo in serie del seno, anche per il coseno "il ciclo si ripete ogni 4 passi", quindi

$D^{V}(\cos x) = D^{I}(\cos x) = -\sin x$, $D^{V}(\cos x)|_0 = -\sin 0 = 0$

$D^{VI}(\cos x) = D^{II}(\cos x) = -\cos x$, $D^{VI}(\cos x)|_0 = -\cos 0 = -1$

$D^{VII}(\cos x) = D^{III}(\cos x) = \sin x$, $D^{VII}(\cos x)|_0 = \sin 0 = 0$

$D^{VIII}(\cos x) = D^{IV}(\cos x) = \cos x$, $D^{VIII}(\cos x)|_0 = \cos 0 = 1$, e così via.

Quindi, considerando lo sviluppo in serie di Taylor-McLaurin, si ha

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} D^{(n)}(\cos x)|_0 \cdot \frac{x^n}{n!} = D^{(0)}(\cos x)|_0 \cdot \frac{x^0}{0!} + D^{I}(\cos x)|_0 \cdot \frac{x^1}{1!} +$$
$$+ D^{II}(\cos x)|_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + D^{III}(\cos x)|_0 \cdot \frac{x^3}{3!} + D^{IV}(\cos x)|_0 \cdot \frac{x^4}{4!} + D^{V}(\cos x)|_0 \cdot \frac{x^5}{5!} +$$
$$+ D^{VI}(\cos x)|_0 \cdot \frac{x^6}{6!} + D^{VII}(\cos x)|_0 \cdot \frac{x^7}{7!} + D^{VIII}(\cos x)|_0 \cdot \frac{x^8}{8!} + \ldots =$$
$$= 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 - \frac{x^6}{6!} + 0 + \ldots$$ e quindi

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \quad \left[\text{I successivi sono } \frac{x^8}{8!} \text{ e } -\frac{x^{10}}{10!}, \ldots\right]}$$

Per ricordarsi: il coseno è una funzione PARI, ci sono solo i termini "di posto pari" (notare che 1 è il termine di posto 0), e i coefficienti sono alternativamente 1 e −1

ESERCIZI:

Adesso calcoliamo alcuni limiti notevoli con le FORMULE DI TAYLOR.

Abbiamo che: [(1), (2) e (3) vedi prima]

$$① \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$② \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$③ \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$④ \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad \text{per } -1 < x \le 1$$

[(4) lo diamo per buono]

Adesso dimostriamo che $l_1 = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Dalla formula ① si ha

$$e^x = \overbrace{1 + x}^{\text{polinomio grado } 1} + \overbrace{o(x)}^{\text{resto}}, \text{ e quindi}$$

$$\boxed{l_1} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} + x + o(x) - \cancel{1}}{x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{x}{x}}_{=1} + \lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{x} =$$

$= 1$ (il limite di una costante è la costante stessa) $+ 0$ (perché $o(x)$ è un infinitesimo di ordine SUPERIORE rispetto ad x) vedi pag. 5 di questi appunti

$= \boxed{1}$, come si voleva dimostrare.

Ora dimostriamo, sempre con Taylor, che

$$\boxed{\ell_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}.$$

Tenendo conto della formula ② di pag. 15, si ha

$$\sin x = x + o(x^2) \text{ , da cui}$$

$$\boxed{\ell_2} = \lim_{x\to 0} \frac{x + o(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{x}{x}}_{=1} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = 1+0 = \boxed{1}$$

(perché $o(x^2)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad x^2, e quindi a maggior ragione rispetto ad x)

Dimostriamo ora che

$$\ell_3 = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Tenendo conto della formula ④ di pag. 15, si ha

$$\ln(1+x) = x + o(x) \text{ , e quindi}$$

$$\boxed{\ell_3} = \lim_{x\to 0} \frac{x + o(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{x}{x}}_{=1} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = 1 + 0$$ (perché $o(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad x) $= \boxed{1}$

Ora proviamo, ancora con Taylor, che

$$\boxed{\ell_4 = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}.$$

Ciò è equivalente a dimostrare che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Dalla formula (3) a pag. 11, si ha

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)},$$ e quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} - \frac{x^2}{2} - \cancel{1} + o(x^2)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} + \lim_{x \to 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{\cancel{x^2}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}}\right) + 0 = -\frac{1}{2}$$

(perché $o(x^2)$ è un infinitesimo di ordine superiore a x^2).

Da ciò, cambiando il segno, si deduce che

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}},$$ come volevamo dimostrare.

Esercizio: Calcolare il seguente limite con Taylor:

$$l_5 = \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} \quad \left(\text{forma } \frac{0}{0}\right)$$

Svolgimento: Poiché al denominatore c'è x^3, prendiamo la formula di Taylor fino all'ordine 3 (e consideriamo sempre di essere in un opportuno intorno del punto 0). Si ha:

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, quindi

$$\boxed{l_5} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{x^3} = \text{(dire } +o(x^3) \text{ oppure } -o(x^3) \text{ è la stessa cosa...)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}-\cancel{x}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cancel{x^3}}\cdot\frac{\cancel{x^3}}{6} + \lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3} =$$

$= \frac{1}{6}$ (il limite di una costante è la costante stessa...) $+ 0$ (perché $o(x^3)$ è un infinitesimo di ordine (strettamente) superiore rispetto ad x^3 per x che tende a 0, cioè è "strettamente più veloce" di x^3) $= \boxed{\frac{1}{6}}$ Quindi $\boxed{l_5 = \frac{1}{6}}$, cioè il risultato del nostro limite è $\frac{1}{6}$.

Esercizio: $\boxed{-15-}$

Calcolare il seguente limite con le formule di Taylor:

$$\ell_6 = \lim_{x\to 0} \frac{2e^x - 2x - 2 - x^2}{x^3} \quad \left(\text{Forma } \frac{2-2}{0} = \frac{0}{0}\right)$$

Svolgimento: Al denominatore abbiamo x^3, quindi cerchiamo i termini della formula di Taylor fino all'ordine 3. Si ha:

$$(*) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

(per ogni $x \in \mathbb{R}$)

Sostituendo, nel calcolo di ℓ_2, ad e^x l'espressione in $(*)$, si ha

$$\boxed{\ell_6} = \lim_{x\to 0} \frac{2\left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] - 2x - 2 - x^2}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2} + \cancel{2x} + \frac{2x^2}{2} + \frac{\overset{1}{\cancel{2}}x^3}{\cancel{6}_3} - \cancel{2x} - \cancel{2} - x^2 + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{3}\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right)$$

$$\frac{1}{3} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3} + 0 = \boxed{\frac{1}{3}}.$$