Complementi di Analisi Matematica Ia

Carlo Bardaro

Capitolo 1

Elementi di topologia della retta reale

1.1 Intorni, punti di accumulazione e insiemi chiusi

Sia $x_0 \in I\!R$ un fissato punto di $I\!R$. Chiameremo intorno del punto x_0 ogni intervallo del tipo:

$$I_\delta(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,$$

al variare di $\delta > 0$. Per estensione, chiameremo intorno del punto x_0 ogni insieme qualsiasi, non necessariamente un intervallo, che contenga un insieme del tipo I_δ.

1. L'insieme $]1/2, 3/2[$ é un intorno del punto $x_0 = 1$, precisamente esso corrisponde all'insieme $I_{1/2}(1)$ con $\delta = 1/2$.

2. L'insieme $]-1/3,4[$ é un intorno del punto $x_0=0$. Sebbene esso non sia della forma $I_\delta(0)$, contiene peró l'insieme $I_{1/3}(0)=]-1/3,1/3[$. Si osservi che lo stesso insieme é anche intorno del punto $x_0=3$. Infatti esso contiene per esempio l'insieme $I_1(3)=]2,4[$.

É chiaro che al variare di $\delta>0$, si ottengono infiniti intorni di un fissato punto x_0. Piú é piccolo δ piú i punti dell'insieme $I_\delta(x_0)$ si "accumulano" vicino a x_0. La considerazione degli insiemi del tipo $I_\delta(x_0)$, con δ "piccolo" ci consente di determinare, in un senso che chiariremo in seguito, quello che succede "vicino" al punto x_0 e di precisare anche la natura del punto x_0.

Sia $A\subset\mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto e sia $x_0\in\mathbb{R}$ un punto fissato. Il punto x_0 si dice *punto di accumulazione per l'insieme* A se **per ogni** $\delta>0$ l'insieme $I_\delta(x_0)$ contiene punti dell'insieme A **distinti** da x_0. In simboli:

$$I_\delta(x_0)\cap A\setminus\{x_0\}\neq\emptyset.$$

Questo significa che in ogni intorno di x_0 devono cadere infiniti punti di A; cioé troviamo punti di A comunque vicini a x_0.

Si faccia attenzione al fatto che il punto x_0 non appartiene necessariamente all'insieme A e, se vi appartenesse, non é detto che esso sia di accumulazione.

1. Consideriamo ad esempio l'insieme:

$$A=\{1,1/2,1/3,1/4,1/5,\ldots,1/n,\ldots\}=\{1/n: n\in\mathbb{N}\}.$$

Prendiamo ad esempio il punto $1/2$. Esso appartiene all'insieme A. Se tale punto fosse di accumulazione per l'insieme A, in **ogni** suo intorno dovrebbero cadere infiniti punti di A. Questo vale per intorni "grandi" di $1/2$: ad esempio se scegliamo $I_{1/2}(1/2) =]0,1[$ questo ovviamente contiene tutti i punti di A, che sono infiniti. Ma ció non é significativo: a noi interessa che ció avvenga per ogni intorno di x_0, cioé per **ogni** scelta di $\delta > 0$, e in particolare per **tutti** i δ "piccoli". Se prendiamo ad esempio $I_\delta(1/2)$, con $0 < \delta < 1/6$ si ha $I_\delta(1/2) \cap A \setminus \{1/2\} = \emptyset$, cioé $I_\delta(1/2)$ **non** contiene punti di A diversi dal punto $1/2$, contraddicendo cosí la definizione di punto di accumulazione. Dunque $1/2$ non é di accumulazione per A.

Allo stesso modo, $1/3$, $1/4$, etc..., non sono di accumulazione per l'insieme A. In tal caso quindi nessun punto di A é di accumulazione per A. Esaminiamo ora il punto $x_0 = 0$. Tale punto non appartiene ad A, ma i punti di A si "accumulano" vicino a 0, come si intuisce facilmente. Verifichiamolo attraverso la definizione. Scegliamo un **qualunque** intorno di $x_0 = 0$, $I_\delta(0)$, con δ generico numero positivo. Dobbiamo dimostrare che dentro $I_\delta(0)$, si trovano infiniti elementi di A, cioé infiniti numeri del tipo $1/n$, $n \in I\!N$. Per far ció, consideriamo l'intervallo $]0, \delta[$, (che rappresenta la metá dell'intervallo $I_\delta(0)$ che é contenuta nel semiasse reale positivo). Considerato il numero positivo $1/\delta$, possiamo sempre scegliere il primo intero $\overline{n} \in I\!N$, tale che $\overline{n} \geq 1/\delta$. (Se ad esempio $\delta = 1/10000000$, allora prenderemo $\overline{n} = 10000000$). Quindi per ogni $n > \overline{n}$, risulterá $1/n < \delta$. Ció implica che tutti questi punti, che sono infiniti ed appartengono ad A, sono contenuti in $I_\delta(0)$.

Il punto $x_0 = 2$ é di accumulazione per A? E il punto $x_0 = 1/\sqrt{2}$?

2. Consideriamo l'insieme $A = [a, b]$, l'intervallo chiuso di estremi a, b. In tal caso tutti i punti di A sono di accumulazione per A. Infatti, sia $x \in A$ un fissato punto. Ogni intorno del tipo $I_\delta(x)$ avrá in comune con A tutti i punti di un intervallo (che sono infiniti). Se ad esempio consideriamo un estremo, ad esempio a, allora ogni intorno $I_\delta(a)$ avrá in comune con A l' intervallo $[a, c]$, dove $c = \min\{a + \delta, b\}$.

3. Consideriamo l'insieme $A =]a, b[$, l'intervallo aperto di estremi a, b. Come nel caso precedente, tutti i punti di A sono di accumulazione per A. Ma anche i punti a, b che non appartengono all'insieme, sono di accumulazione per A. La dimostrazione di questo semplice fatto é lasciata al lettore.

4. Ogni insieme A costituito da un numero finito di punti, non puó avere punti di accumulazione. Lo studente trovi una giustificazione di questo fatto.

L'insieme costituito da tutti i punti di accumulazione di un insieme A, si chiama l'insieme *derivato* di A e si indica con il simbolo A'. L'insieme $\overline{A} = A \cup A'$ si chiama la *chiusura* di A. I punti di $\overline{A}$ si chiamano anche *punti aderenti ad* A. Pertanto un punto aderente di un insieme A é o un punto di A, oppure un punto di accumulazione di A.

1. L'insieme derivato di $A = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$ é costituito dal solo punto $\{0\}$. La chiusura di A é in tal caso data da $\overline{A} = A \cup \{0\}$.

2. La chiusura dell'insieme $A = [a, b]$ é l'insieme stesso, cioé in tal caso $\overline{A} = A$. In tal caso infatti i punti di accumulazione di A sono tutti e soli i punti dell'insieme stesso.

3. La chiusura dell'insieme $A =]a, b[$ é l'intervallo chiuso $[a, b]$. Infatti ai punti di A occorre aggiungere anche i punti a, b che, pur non appartenendo ad A, sono di accumulazione per A.

Si noti che in generale $A \subset \overline{A}$. Se risulta $A = \overline{A}$, diremo che l'insieme A é *chiuso*. Pertanto un insieme é chiuso se esso coincide con la sua chiusura, ovvero se tutti i suoi punti sono aderenti.

Per esempio, l'insieme $A = [a, b]$ é chiuso, mentre l'insieme $]a, b[$ non é chiuso. L'insieme $A = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$ non é chiuso perché non contiene il suo punto di accumulazione 0.

Abbiamo visto che i punti appartenenti ad un insieme A non é detto che siano di accumulazione per A. In tal caso parleremo di *punti isolati* di A. Pertanto un punto isolato di A é un punto che non é di accumulazione per A. In termini di intorni possiamo quindi dire che: un punto $x_0 \in A$ é un punto isolato di A, se **esiste** un intorno di x_0, $I_\delta(x_0)$ la cui intersezione con A é data solo dal punto x_0. Cioé ancora, $x_0 \in A$ é isolato se esiste un suo intorno che non contiene altri punti di A.

1. I punti dell'insieme $A = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$ sono isolati. Infatti, come abbiamo visto in precedenza, essi non sono di accumulazione. Facciamo vedere che esiste un intorno di ciascuno di essi che non contiene altri punti di A, ad eccezione del punto stesso. Prendiamo il generi-

co punto $x_0 = 1/n$. I punti di A piú vicini ad x_0 sono $1/(n+1)$ e $1/(n-1)$. La distanza del punto $1/n$ dal punto $1/(n+1)$ é data da:

$$\left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n(n+1)},$$

mentre la distanza di $1/n$ da $1/(n-1)$ é data da $1/n(n-1)$. Allora, prendiamo un numero positivo δ tale che

$$\delta < \min\{1/n(n-1), 1/n(n+1)\} = 1/n(n+1).$$

Nell'intorno $I_\delta(1/n)$ non ci sono ovviamente altri punti di A ad eccezione del punto $1/n$. Pertanto, data l'arbitrarietá di $n \in I\!N$, tutti i punti di A sono isolati.

2. I punti di un intervallo qualsiasi I in $I\!R$, non sono isolati. Infatti, come abbiamo visto essi sono di accumulazione per I.

1.2 Punti interni, insiemi aperti

Sia $A \subset I\!R$ un insieme fissato. Un punto $x_0 \in A$ si dice *interno* ad A, se **esiste** almeno un intorno del tipo $I_\delta(x_0)$ tale che $I_\delta(x_0) \subset A$.

1. Sia $A = [a,b] = \{x \in I\!R : a \leq x \leq b\}$. Allora ogni punto di A diverso dagli estremi a, b é un punto interno ad A. Infatti sia x tale che $a < x < b$. Scegliamo un $\delta > 0$ ponendo: $\delta < \min\{x-a, b-x\}$. É allora ovvio che il corrispondente intorno $I_\delta(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ sia contenuto in A. I punti estremi a, b non sono interni, perche ogni loro intorno ha un'intersezione non vuota con il complementare di A.

2. Consideriamo l'insieme $A = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$. In tal caso nessun punto di A é interno ad A. Infatti, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, ogni punto di A é isolato, cioé esiste un intorno del punto che non contiene altri punti di A ad eccezione del punto stesso. Pertanto non puó esistere alcun intorno che sia tutto immerso in A.

Si osservi che ogni punto interno ad A é di accumulazione per A. Infatti, sia $x_0 \in A$ un punto interno. Esiste allora $\overline{\delta} > 0$ tale che $I_{\overline{\delta}}(x_0) \subset A$. Per dimostrare che x_0 é anche di accumulazione per A, dobbiamo mostrare che **ogni** intorno di x_0 contiene infiniti punti dell'insieme A. Ció vale ovviamente per $I_{\overline{\delta}}(x_0)$. Se allora $\delta > 0$, é un arbitrario numero positivo, l'insieme $I_{\overline{\delta}}(x_0) \cap I_\delta(x_0)$ é un intervallo (intorno) di x_0 tutto immerso in A, e pertanto $I_\delta(x_0)$ interseca A in un insieme infinito di punti.

Non vale il viceversa: se $x_0 \in A$ é un punto di accumulazione per A, non é detto che sia interno ad A. É sufficiente considerare ad esempio l'estremo di un intervallo chiuso $[a, b]$. Tale estremo é di accumulazione, ma non é interno.

Un punto $x_0 \in I\!R$ si dice *punto frontiera* di A se **ogni** intorno di x_0 contiene punti di A e punti del suo complementare.

1. Ogni punto isolato di un insieme A é un punto frontiera di A.

2. I punti estremi di un intervallo (chiuso, aperto o semiaperto), sono punti frontiera.

3. Ogni punto dell'insieme $A = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$ é un punto frontiera di A. Ma anche il punto $x_0 = 0$ é un punto frontiera.

4. Ovviamente i punti interni di un insieme non possono essere punti frontiera.

Lo studente volenteroso risponda ai seguenti quesiti:

1. É vero che ogni punto frontiera di A é di accumulazione per A?

2. É vero che ogni punto di accumulazione é di frontiera?

3. É vero che ogni punto interno é di accumulazione?

4. É vero che ogni punto di accumulazione é interno?

5. É vero che ogni punto frontiera é isolato?

Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme fissato. Diremo che A é *aperto* se ogni suo punto é interno. Pertanto se A é aperto, ogni punto $x \in A$ possiede un intorno $I_\delta(x)$ tutto contenuto in A.

1. Ogni intervallo aperto del tipo $]a, b[$ é un insieme aperto nel senso introdotto sopra. Infatti, come abbiamo giá visto, ogni punto $x \in]a, b[$ possiede l'intorno $I_\delta(x)$, con $\delta < \min\{x - a, b - x\}$ che é tutto contenuto in $]a, b[$.

2. L'unione di un numero finito di insiemi aperti é un insieme aperto. Infatti sia $U = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, con A_i aperti. Sia $x \in U$ un generico punto di U. Allora x apparterrá ad almeno un aperto, diciamo A_j. Esiste allora un intorno $I_\delta(x)$ contenuto in A_j e quindi anche in U. Lo stesso si puó dire per una famiglia infinita di insiemi aperti.

3. L'intersezione non vuota di un numero finito di insiemi aperti é un insieme aperto. La dimostrazione é lasciata allo studente. Quasto non vale per famiglie infinite: l'intersezione di una famiglia infinita di insiemi aperti non é in generale un insieme aperto. Ad esempio poniamo $A_n =]-1/n, 1/n[$. Si ha:

   $$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\},$$

   che non é ovviamente aperto.

4. Il complementare di un insieme aperto é chiuso e, viceversa, il complementare di un chiuso é un aperto. Infatti sia A per esempio un aperto. Vogliamo mostrare che il suo complementare é chiuso, cioé contiene tutti i suoi (eventuali) punti di accumulazione. Sia allora $x \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A^c. Mostriamo che allora deve essere $x \in A^c$. Se fosse $x \in A$, essendo A aperto, x sarebbe interno ad A, e come tale, non puó essere di accumulazione per A^c, in contraddizione con l'ipotesi. Pertanto ogni punto di accumulazione di A^c dovrá essere contenuto in A^c, cioé A^c é chiuso.

Capitolo 2

Limiti

2.1 La definizione di limite

Il concetto di limite di una funzione in un punto é centrale nello sviluppo della teoria. Esso é alla base del calcolo infinitesimale. Esso permette uno studio accurato del comportamento di una funzione in prossimitá di un dato punto, nel quale la funzione stessa puó non essere definita.

Sia $f : A \to I\!R$ una funzione e sia $x_0 \in I\!R$ un punto di accumulazione per A. Allora sará possibile avvicinarci al punto x_0 con punti di A, nei quali possiamo certamente calcolare il valore $f(x)$. Come si comporta la f quando $x \in A$ si avvicina a x_0? o, come si dice, quando x tende a x_0?

Per esprimere questo in termini formali, si introduce la seguente nozione di limite:

1. Diremo che la funzione f tende al limite ℓ per $x{\to}x_0$ se per ogni fissato $\varepsilon > 0$, esiste in corrispondenza un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni

$x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta$, risulti

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

In termini di intorni, possiamo esprimere la definizione data sopra, nel modo seguente: la funzione f tende al limite ℓ per $x \to x_0$ se per ogni intorno $I_\varepsilon(\ell)$ di ℓ esiste un intorno del punto x_0, $I_\delta(x_0)$, dipendente da ε, tale che per ogni $x \in A \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$, risulti $f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$.

Per denotare ció scriveremo:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Si osservi che non é qui interessante il valore che f eventualmente assume in x_0, punto nel quale la f puó non essere nemmeno definita, ma ció che interessa sono i valori che f assume vicino al punto x_0.

1. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq 2 \\ 0, & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

   Quanto vale il limite $\lim_{x \to 2} f(x)$? I valori che la f assume "vicino" a 2 coincidono tutti con 1 e pertanto sembra logico dedurre che il limite é 1. Verifichiamo questo fatto attraverso la definizione di limite. Posto $\ell = 1$, fissiamo un $\varepsilon > 0$. Occorre determinare, in corrispondenza della scelta arbitraria di ε, un intorno $I_\delta(2)$ del punto 2 tale che per ogni $x \in I_\delta(2) \setminus \{2\}$ risulti $|f(x) - 1| < \varepsilon$. Tale disuguaglianza é ovviamente verificata da ogni punto di $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, poiché in tali punti $f(x) = 1$. In tal caso, allora, possiamo scegliere un qualsiasi $\delta > 0$.

2. Consideriamo la funzione $f\ :]-1,+\infty[\to I\!R$ definita dalla $f(x) = \log(1+x)$. Qui $A =]-1,+\infty[$.

   Vogliamo verificare che il limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ esiste ed é uguale a 0. Posto $\ell = 0$, sia $\varepsilon > 0$ fissato arbitrariamente. Dobbiamo determinare un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in I_\delta(0) \cap A \setminus \{x_0\}$ risulti $|f(x) - 0| = |f(x)| < \varepsilon$. Ora dalla disuguaglianza

   $$|\log(1+x)| < \varepsilon,$$

   ricaviamo:

   $$-\varepsilon < \log(1+x) < \varepsilon,$$

   passando allora alla funzione esponenziale,

   $$e^{-\varepsilon} < 1 + x < e^{\varepsilon},$$

   da cui $x \in]-1+e^{-\varepsilon}, e^{\varepsilon}-1[$. Ora dobbiamo chiederci: questo insieme di valori di x che abbiamo determinato, contiene un intorno del punto 0? Osserviamo che $-1+e^{-\varepsilon} < 0$ e $e^{\varepsilon} - 1 > 0$. Pertanto il punto 0 é interno all'intervallo $I =]-1+e^{-\varepsilon}, e^{\varepsilon}-1[$. Esiste allora un $\delta > 0$, tale che $I_\delta(0) \subset I$. Per ogni punto di $I_\delta(0)$ vale allora la disuguaglianza $|\log(1+x)| < \varepsilon$.

2.2 Primi teoremi sui limiti

Sussistono i seguenti teoremi.

Teorema 1 *(Unicitá del limite). Sia $f : A \rightarrow I\!R$, una funzione assegnata, $x_0 \in A'$. Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ allora tale limite é unico.*

DIMOSTRAZIONE Supponiamo che $\ell, \ell' \in I\!R$ siano due diversi valori per il limite. Fissiamo allora arbitrariamente $\varepsilon > 0$ tale che $0 < \varepsilon < |\ell - \ell'|/2$. Dal fatto che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, esiste in corrispondenza alla scelta di ε, un $\delta' > 0$ tale che per ogni $x \in I_{\delta'}(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}$, risulti

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Tuttavia essendo anche $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell'$, esisterá un $\delta'' > 0$, tale che che per ogni $x \in I_{\delta''}(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}$, risulti

$$|f(x) - \ell'| < \varepsilon.$$

Preso allora $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, per ogni $x \in I_\delta(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}$, le relazioni soprascritte dovrebbero essere verificate contemporaneamente. Cioé si avrebbe per tali x :

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon, \quad \ell' - \varepsilon < f(x) < \ell' + \varepsilon.$$

Ció é impossibile, perché, per la scelta di ε, i due intervalli

$$]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[, \ ]\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon[$$

sono disgiunti.

Teorema 2 *(della permanenza del segno). Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, e $\ell \neq 0$, allora esiste un intorno del punto x_0, $I_\delta(x_0)$ tale che $f(x)$ é dello stesso segno del limite, per ogni $x \in I_\delta(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per esempio che $\ell > 0$. Allora per la definizione di limite, scelto $\varepsilon = \ell/2$, esisterá un intorno $I_\delta(x_0)$ del punto x_0 tale che per ogni $x \in I_\delta(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}$ risulti

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon,$$

cioé in particolare

$$f(x) > \ell/2 > 0.$$

Teorema 3 *(della limitatezza locale) Se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in I\!R$, *allora esiste un intorno del punto* x_0, $I_\delta(x_0)$ *tale che* $f(x)$ *é limitata sull'insieme* $I_\delta(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}$, *cioé esiste un* $M > 0$ *tale che* $|f(x)| \leq M$, *per ogni* $x \in I_\delta(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}$.

DIMOSTRAZIONE. É lasciata per esercizio: é una immediata conseguenza della definizione di limite.

Teorema 4 *(Confronto). Siano* $f, g, h : A \to I\!R$ *tre funzioni assegnate,* $x_0 \in A'$. *Supponiamo che esista un intorno* $I_\delta(x_0)$, *del punto* x_0, *tale che* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, *per ogni* $x \in A \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$. *Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell,$$

allora risulta anche $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo arbitrariamente un $\varepsilon > 0$. In corrispondenza esiste un $\delta' > 0$ tale che

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

per ogni $x \in A \cap I_{\delta'}(x_0) \setminus \{x_0\}$. Inoltre esiste un $\delta'' > 0$ tale che

$$|h(x) - \ell| < \varepsilon,$$

per ogni $x \in A \cap I_{\delta''}(x_0) \setminus \{x_0\}$. Scegliamo allora $\delta^* = \min\{\delta, \delta', \delta''\}$. Per ogni $x \in A \cap I_{\delta^*}(x_0) \setminus \{x_0\}$ si avrá allora:

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon,$$

da cui

$$|g(x) - \ell| < \varepsilon,$$

per ogni $x \in A \cap I_{\delta^*}(x_0) \setminus \{x_0\}$. Per l'arbitrarietá di ε é cosí dimostrata la definizione di limite $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$.

2.3 Limiti delle restrizioni

Sia $f : A \to \mathbb{R}$, una funzione assegnata e sia $B \subset A$ un sottoinsieme. Sia x_0 un punto di accumulazione per A e per B. In tal modo possiamo studiare il comportamento della funzione f per valori di x prossimi a x_0 sia appartenenti ad A che, in particolare, a B. Consideriamo la funzione $f_B : B \to \mathbb{R}$ definita dalla relazione $f_B(x) = f(x)$, per ogni $x \in B$. Tale funzione si chiama la *restrizione* di f al sottoinsieme B. Vogliamo stabilire, sotto le condizioni imposte, la relazione che intercorre tra l'esistenza del limite della f e quello delle sue restrizioni.

Ci riferiamo alle notazioni precedenti. Sussiste il seguente

Teorema 5 *Se esiste* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell,$ *esiste anche il limite* $\lim_{x\to x_0} f_B(x)$ *e tale limite coincide con* ℓ*. Viceversa, se* **ogni** *possibile restrizione della funzione* $f,$ *su sottoinsiemi di* A *che ammettono* x_0 *come punto di accumulazione, ammette limite per* $x{\to}x_0$*, e il valore* ℓ *di tutti questi limiti é lo stesso, allora anche la* f *ammette limite* ℓ*.*

Si osservi quindi che se la f ammette limite, allora tutte le sue restrizioni ammissibili hanno lo stesso limite. Il viceversa é vero solo se si riesce a stabilire che **tutte** le restrizioni ammettono lo **stesso** limite. Facciamo alcuni esempi.

1. Consideriamo la funzione $f : I\!\!R{\to}I\!\!R$ definita dalla:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in I\!\!R \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

   Sia $x_0 \in I\!\!R$ un qualsiasi punto fissato. Tale punto é evidentemente di accumulazione sia per $\mathbb{Q}$ che per $I\!\!R \setminus \mathbb{Q}$. Pertanto le due funzioni $f_{\mathbb{Q}}$ e $f_{I\!\!R\setminus\mathbb{Q}}$ sono restrizioni ammissibili per la funzione f. Essendo $f_{\mathbb{Q}}(x) = 1$, il limite di questa restrizione sará 1. Invece, $\lim_{x\longrightarrow x_0} f_{I\!\!R\setminus\mathbb{Q}}(x) = 0$. Da questo deduciamo allora che il limite $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)$ non esiste, perché se esistesse, in base al teorema precedente ogni sua restrizione dovrebbe avere lo stesso limite.

2. *Limiti destro e sinistro in un punto.* Sia f una funzione definita per esempio su un intervallo $J{\subset}I\!\!R,$ ad eccezione eventualmente di un punto x_0 interno a J. In tal modo x_0 é di accumulazione per J, e noi possiamo

avvicinarci al punto x_0 sia per valori $x \in J,\ x < x_0$, che per valori $x \in J,\ x > x_0$. Consideriamo allora le restrizioni di f ai sottoinsiemi $J_+ = \{x \in J : x > x_0\}$, e $J_- = \{x \in J : x < x_0\}$. Chiameremo *limite destro di f in x_0* il limite, se esiste,

$$\lim_{x \to x_0} f_{J_+}(x),$$

e lo denoteremo con uno dei simboli:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x), \quad f(x_0+), \quad f(x_0 + 0).$$

Analogamente chiameremo *limite sinistro di f in x_0* il limite, se esiste,

$$\lim_{x \to x_0} f_{J_-}(x),$$

e lo denoteremo con uno dei simboli:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x), \quad f(x_0-), \quad f(x_0 - 0).$$

Dal teorema delle restrizioni segue che se esiste il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, allora esistono anche i limiti destro e sinistro $f(x_0+),\ f(x_0-)$ ed essi coincidono. Ma in tal caso vale anche il viceversa: se esistono i limiti destro e sinistro ed essi coincidono, allora esiste anche il limite di f e il suo valore coincide con il valore comune dei due limiti. Ció dipende dal fatto che le due restrizioni $J_+,\ J_-$ hanno la proprietá che $J_+ \cup J_- = J$.

Per concludere é ovvio che se esistono i limiti destro e sinistro in x_0, e questi limiti sono diversi, allora non esiste il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

2.4 Definizione di limite di una funzione con dominio o codominio in $\widetilde{I\!R}$

Sia $f : A \rightarrow I\!R$ una funzione assegnata, e supponiamo che l'insieme A sia non limitato superiormente. Possiamo pensare per esempio ad una semiretta del tipo $]a, +\infty[$. Vogliamo studiare il comportamento di f quando la variabile indipendente assume valori arbitrariamente "grandi", cioé quando x tende a $+\infty$. A tal fine diremo che il limite di f per $x \rightarrow +\infty$ é uguale ad $\ell \in I\!R$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste in corrispondenza un numero positivo $M > 0$ tale che per ogni $x \in A$, $x > M$ risulti

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Questo significa che $f(x)$ assume valori prossimi a ℓ quanto piú x é grande. Tale definizione non si differenzia formalmente da quella vista precedentemente. Se infatti definiamo "intorno" del punto $+\infty$ un insieme del tipo $I_M(+\infty) = \{x \in I\!R : x > M\}$, allora la definizione sopra introdotta, espressa in termini di intorni, é esattamente la stessa di quella precedente: per ogni intorno $I_\varepsilon(\ell)$ di ℓ esiste un intorno $I_M(+\infty)$ del punto $+\infty$ tale che per ogni $x \in A \cap I_M(+\infty)$ risulta $f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$.

Analogamente, se A non é limitato inferiormente, (ad esempio possiamo pensare ad una semiretta del tipo $]-\infty, a[$), allora diremo che il limite di f per $x \rightarrow -\infty$ é uguale ad $\ell \in I\!R$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste in corrispondenza un numero positivo $M > 0$ tale che per ogni $x \in A$, $x < -M$ risulti

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Questo significa che $f(x)$ assume valori prossimi a ℓ quanto piú x é negativo. Anche in tal caso definiamo "intorno" del punto $-\infty$ un insieme del tipo $I_M(-\infty) = \{x \in I\!R : x < -M\}$. Allora la definizione sopra introdotta, espressa in termini di intorni, é esattamente la stessa di quella precedente: per ogni intorno $I_\varepsilon(\ell)$ di ℓ esiste un intorno $I_M(-\infty)$ del punto $-\infty$ tale che per ogni $x \in A \cap I_M(-\infty)$ risulta $f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$.

I teoremi del confronto, della limitatezza locale e della permanenza del segno, si trasportano immediatamente al caso in cui $x_0 = \pm\infty$.

Molto spesso si ha a che fare con funzioni non limitate in prossimitá di qualche punto. Ad esempio se consideriamo la funzione $f(x) = 1/x^2$ quando x é prossimo a 0 il valore $f(x)$ tende ad assumere valori molto grandi. Vogliamo esprimere questo attraverso una relazione di limite. Scriveremo in tal caso

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Cosa vuol dire questa scrittura? Semplicemente significa che per ogni "intorno" $I_M(+\infty)$ del punto $+\infty$ esiste in corrispondenza un intorno $I_\delta(0)$ del punto 0 tale che per ogni $x \in A \cap I_\delta(0)$, risulta $f(x) \in I_M(+\infty)$, o anche $f(x) > M$.

In generale avremo la seguente definizione: diremo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ se per ogni $M > 0$, esiste in corrispondenza un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ risulti

$$f(x) > M.$$

Analogamente, diremo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, se per ogni $M > 0$, esiste in corrispondenza un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ risulti

$$f(x) < -M.$$

Infine, se una funzione f é definita su un insieme non limitato, ad esempio su una semiretta del tipo $]a, +\infty[$, la scrittura

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

significa che per ogni $M > 0$ esiste in corrispondenza un numero $N > 0$ tale che, per ogni $x \in A$ con $x > N$ risulta $f(x) > M$.

Cosí $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, significa che per ogni $M > 0$ esiste in corrispondenza un numero $N > 0$ tale che, per ogni $x \in A$ con $x > N$ risulta $f(x) < -M$.

Lasciamo al lettore di scrivere il significato delle scritture:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

In questo caso, sussiste ancora il teorema della permanenza del segno e vale la seguente versione del teorema di confronto:

Teorema 6 *Siano* $f, g :]a, +\infty[\to I\!R$ *due funzioni tali che* $f(x) \leq g(x)$ *per ogni* $x \in]a, +\infty[$. *Allora se* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, *risulta anche* $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. *Se invece* $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, *risulta anche* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.