

# Appunti di Analisi di Fourier

CARLO BARDARO

6.02.2016

# Contents

<b>Prefazione</b>	<b>4</b>
<b>1 Serie di Fourier</b>	<b>7</b>
1.1 Sistemi ortogonali in $L^2(I)$ , $I \subset \mathbb{R}$	7
1.2 Il problema della migliore approssimazione	10
1.3 Proprietá principali dei coefficienti di Fourier	12
1.4 Il sistema trigonometrico. La trasformata finita di Fourier	15
<b>2 Convoluzioni in <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>19</b>
2.1 Notazioni e risultati preliminari	19
2.2 Convoluzioni in $\mathbb{R}$	21
2.3 Funzioni periodiche e loro convoluzioni	23
2.4 Due teoremi di Analisi Funzionale	25
2.5 Integrali singolari di funzioni periodiche	27
<b>3 Applicazioni alle serie trigonometriche di Fourier</b>	<b>31</b>
3.1 Alcune relazioni preliminari	31
3.2 Serie di Fourier	33
3.3 Convergenza delle serie di Fourier	35
3.4 Convergenza in norma	39
3.5 Completezza del sistema trigonometrico	45
3.6 $\Theta$ -fattori	46
<b>4 Alcune applicazioni alle equazioni alle derivate parziali</b>	<b>53</b>
4.1 L'equazione delle onde	53
4.2 L'equazione del calore	59
4.3 L'equazione di Laplace	61

<b>5</b>	<b>La trasformata di Fourier</b>	<b>64</b>
5.1	L'integrale di Fourier . . . . .	64
5.2	La trasformata di Fourier. Prime proprietà . . . . .	67
5.3	Proprietà fondamentali della trasformata di Fourier in $\mathbb{R}$ . . . . .	71
5.4	Inversione . . . . .	74
5.5	La formula di sommazione di Poisson . . . . .	79
5.6	Alcune applicazioni alle equazioni differenziali alle derivate parziali . . . . .	81
5.7	Applicazioni alle equazioni integrali di Fredholm . . . . .	85
<b>6</b>	<b>La trasformata di Fourier in <math>L^p</math>, <math>1 &lt; p \leq 2</math></b>	<b>88</b>
6.1	Risultati preliminari . . . . .	88
6.2	La trasformata di Fourier in $L^p(\mathbb{R})$ , $1 < p \leq 2$ . . . . .	89
6.2.1	Il caso $p = 2$ . . . . .	89
6.2.2	Il caso $1 < p < 2$ . . . . .	92
6.3	Proprietà fondamentali . . . . .	95
6.4	Inversione . . . . .	98
6.5	Applicazioni al calcolo di integrali . . . . .	101
<b>7</b>	<b>Il teorema del campionamento</b>	<b>106</b>
7.1	Il teorema del campionamento di Shannon . . . . .	106
7.2	Le classi di Bernstein e il teorema di Paley-Wiener . . . . .	109
7.3	La "Reproducing Kernel Formula" e la formula di Parseval . . . . .	112
7.4	Il teorema di Heisenberg . . . . .	114
<b>8</b>	<b>Cenni sulla trasformata di Fourier in <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>119</b>
8.1	Notazioni e definizioni preliminari . . . . .	119
8.2	La trasformata di Fourier . . . . .	120
8.3	Applicazioni alle equazioni differenziali . . . . .	123
8.4	Il teorema del campionamento in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	125
<b>9</b>	<b>Distribuzioni temperate</b>	<b>128</b>
9.1	Classi di funzioni test . . . . .	129
9.2	Distribuzioni temperate . . . . .	130
9.3	Derivata di una distribuzione . . . . .	134
9.4	La trasformata di Fourier di una distribuzione temperata . . . . .	140
9.5	Convoluzioni . . . . .	145
9.6	Alcune applicazioni . . . . .	147

9.6.1	Applicazioni alle equazioni differenziali . . . . .	147
9.6.2	Il teorema di Paley-Wiener-Schwartz . . . . .	149
0.1	Funzioni di variabile complessa . . . . .	150
0.2	Integrazione in campo complesso . . . . .	154
0.3	Sviluppo in serie di Taylor e gli zeri delle funzioni analitiche .	156

<b>Bibliografia</b>		<b>159</b>
---------------------	--	------------

# Prefazione

L'Analisi di Fourier é un potente strumento per risolvere molti problemi che sorgono nella ricerca scientifica, in particolare nella risoluzione di equazioni differenziali e nella teoria della ricostruzione di segnali ed immagini. L'origine di questa teoria risale alla famosa monografia di Joseph Fourier "Théorie analytique de la chaleur", pubblicata nel 1822, che raccoglie idee già sviluppate anni prima dallo stesso Fourier, secondo il quale ogni "funzione", non importa se periodica o no, può essere sviluppata in serie trigonometriche (dette appunto serie di Fourier). Questa idea, che all'epoca di Fourier si poteva considerare una congettura, fu criticata da molti matematici, tra cui Lagrange e Laplace (dei quali Fourier fu studente), soprattutto per lo scarso rigore delle argomentazioni. In effetti, il primo risultato rigoroso sulla convergenza delle serie di Fourier fu quello di Dirichlet, il quale provó la convergenza puntuale delle serie di Fourier per ogni funzione regolare a tratti. Va detto che all'epoca di Fourier il concetto di funzione non era definito nel modo generale ed astratto che utilizziamo ancora oggi: con il termine "funzione" si intendevano polinomi, seni, coseni e loro combinazioni, esponenziali, etc.. Fu lo stesso Dirichlet a definire il concetto di funzione come una legge che associa ad un punto di un insieme (dominio) un (unico) punto di un altro insieme (codominio). Oggi sappiamo che una funzione continua non può essere in generale approssimata puntualmente dalla sua serie di Fourier. Lo studio della convergenza di queste serie ha accompagnato lo sviluppo dell'analisi matematica: dal concetto di funzione al concetto di integrale, che é alla base del calcolo dei coefficienti di Fourier. Il risultato piú generale sulla convergenza delle serie di Fourier é quello relativo alla convergenza quasi ovunque per funzioni a quadrato sommabile, dimostrato nel 1966 da Lennart Carleson e poi generalizzato agli spazi  $L^p$  negli anni Settanta del secolo scorso.

Queste dispense rappresentano una raccolta dei principali risultati dell'Analisi di Fourier: si parte con l'approccio generale degli spazi di Hilbert come am-

biente naturale per descrivere le somme parziali delle serie di Fourier come "proiezioni" su sottospazi di  $L^2([-\pi, \pi])$  di dimensione finita, per arrivare poi alla formulazione del teorema di migliore approssimazione in  $L^2([-\pi, \pi])$ . Successivamente si estendono i risultati di convergenza allo spazio  $L^1([-\pi, \pi])$ : qui la serie di Fourier non converge in  $L^1$  alla funzione  $f$  e pertanto si introducono metodi generalizzati di convergenza basati su successioni (teta-fattori) che moltiplicate per il termine generale delle somme parziali della serie di Fourier danno origine ad integrali di convoluzione (integrali singolari) dipendenti da un parametro, che convergono in  $L^1$  alla funzione  $f$ . Ciò ha dato origine alla vasta teoria dell'approssimazione delle funzioni negli spazi  $L^p$  attraverso integrali singolari generati da identità approssimate (funzioni peridiche in  $L^1([-\pi, \pi])$  che soddisfano a particolari condizioni). In questa teoria si inserisce il famoso teorema di Fejer che stabilisce la convergenza delle medie di Cesaro delle serie di Fourier alla funzione  $f$ . Su di esso si basa il teorema di Weierstrass sulla densità dei polinomi trigonometrici nello spazio delle funzioni continue e periodiche.

Si illustrano successivamente le principali applicazioni alle equazioni differenziali, con la risoluzione dell'equazione (unidimensionale) delle onde, del calore e di Laplace su domini semplici. Le serie di Fourier intervengono nell'applicazione del metodo della separazione delle variabili.

Il capitolo successivo riguarda invece la teoria della trasformata di Fourier: si inizia con il considerare il caso di funzioni in  $L^1(\mathbb{R})$ . Il "filo conduttore" è il seguente: la successione dei coefficienti di Fourier della serie viene ora sostituita con una funzione, la trasformata di Fourier, definita in  $\mathbb{R}$ . Si passa quindi dal "discreto" al "continuo": la serie di Fourier viene ora sostituita dall'integrale inverso di Fourier (formula di inversione). Le proprietà di convergenza della trasformata inversa seguono le linee di quelle delle serie di Fourier, sviluppando così una teoria parallela. Successivamente si studia l'estensione della definizione di trasformata di Fourier al caso di funzioni  $L^p(\mathbb{R})$  con  $1 \leq p \leq 2$ , con l'ausilio di un teorema di interpolazione di Riesz-Thorin. Si stabiliscono quindi le proprietà principali, analoghe a quelle del caso  $L^1$ . Ma la differenza è sostanziale: mentre la trasformata di Fourier di una funzione  $L^1$  è una funzione continua, quella di una funzione  $L^p$  è soltanto definita q.o. Una particolare attenzione è dedicata al caso  $L^2$ , che ha ricadute importanti per il successivo capitolo, quello relativo al teorema di campionamento. Qui si parte dal risultato classico in  $L^1$  per arrivare alla sua formulazione generale in  $L^2$ . Concetto chiave è la nozione di funzione "band-limited", cioè una funzione continua la cui trasformata di Fourier

é a supporto compatto. La struttura dello spazio di tali funzioni (spazio di Paley-Wiener) é qui studiata con l'ausilio del teorema di Paley-Wiener che stabilisce la (estrema) regolaritá di tali funzioni: esse sono funzioni che ammettono una estensione all'intero campo complesso come funzioni intere di ordine esponenziale. Un'altra caratteristica delle funzioni band-limited é illustrata dal teorema di Heisenberg: una funzione non puó essere contemporaneamente a supporto compatto e a banda limitata, stabilendo cosí un aspetto del classico principio di indeterminazione. Il capitolo successivo tratta invece della estensione al caso multidimensionale della trasformata di Fourier, con l'illustrazione di alcune applicazioni alle equazioni differenziali e al teorema di campionamento in  $R^n$ : quest'ultimo interviene nei problemi di ricostruzioni di immagini.

L'ultimo capitolo riguarda invece la teoria delle distribuzioni temperate: lo scopo principale é la possibilitá di definire una trasformata di Fourier anche per funzioni (che vengono identificate con le distribuzioni regolari che esse generano) appartenenti ad  $L^p$  con  $p > 2$ . Si illustrano molti esempi ed alcune applicazioni, fino ad arrivare al teorema generale di campionamento per funzioni in  $L^p$ ,  $p \geq 1$ , a banda limitata.

In appendice vengono raccolti alcuni risultati di analisi complessa rilevanti per la teoria sviluppata.

# Chapter 1

## Serie di Fourier

### 1.1 Sistemi ortogonali in $L^2(I)$ , $I \subset \mathbb{R}$

Sia  $I \subset \mathbb{R}$  un generico intervallo che può essere anche non limitato. Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione misurabile (secondo Lebesgue) in  $I$  (cioè posto  $f = u + iv$ , le funzioni  $u, v$  sono misurabili in  $I$ ). Diremo che  $f$  è integrabile secondo Lebesgue in  $I$  se lo è la funzione reale  $|f| = (u^2 + v^2)^{1/2}$ . Denoteremo con  $L^1(I)$  lo spazio di tali funzioni. Dato che  $|u| \leq |f|$ , e  $|v| \leq |f|$ , se  $f$  è integrabile in  $I$ , lo sono anche  $u$  e  $v$ . Con  $L^2(I)$  indicheremo lo spazio di tutte le funzioni misurabili  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  tali che  $|f|^2 \in L^1(I)$ . Come al solito noi penseremo gli elementi di  $L^p(I)$ ,  $p = 1, 2$ , come a classi di equivalenza rispetto alla relazione di uguaglianza quasi ovunque. In tal modo  $f = g$  in  $L^p(I)$  significa  $f(x) = g(x)$  quasi ovunque in  $I$ . Usando la disuguaglianza di Hölder con  $p = q = 2$ , otteniamo che  $f \cdot g \in L^1(I)$  ogniqualvolta  $f, g \in L^2(I)$  e si ha:

$$\int_I |fg| dx \leq \sqrt{\int_I |f|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_I |g|^2 dx} \quad (1.1)$$

relazione che sinteticamente scriveremo  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$ .  
Il funzionale  $\langle, \rangle : L^2(I) \times L^2(I) \rightarrow \mathbb{C}$  definito dalla:

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x) \overline{g(x)} dx, f, g \in L^2(I), \quad (1.2)$$

è allora ben definito e si chiama *prodotto scalare* o *prodotto interno* in  $L^2(I)$ . Dalla (2) è facile vedere che  $\langle f, f \rangle^{1/2}$  è un numero reale non negativo e coincide con  $\|f\|_2$ .



La proposizione seguente mette in evidenza alcune proprietà fondamentali del prodotto scalare.

**Proposizione 1** Se  $f, g, h \in L^2(I)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ , sussistono le seguenti proprietà:

(i)  $\overline{\langle g, f \rangle} = \langle f, g \rangle$

(ii)  $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$

**Dimostrazione.** (i) Osserviamo anzitutto che se  $f : I \rightarrow \mathbf{C}$  è una funzione integrabile, si ha:

$$\operatorname{Re} \int_I f(x) dx = \int_I \operatorname{Re} f(x) dx, \operatorname{Im} \int_I f(x) dx = \int_I \operatorname{Im} f(x) dx.$$

Allora si ha:

$$\begin{aligned} \overline{\langle g, f \rangle} &= \operatorname{Re} \langle g, f \rangle - i \operatorname{Im} \langle g, f \rangle = \int_I \{ \operatorname{Re}(g\bar{f}) - i \operatorname{Im}(g\bar{f}) \} dx \\ &= \int_I \overline{g\bar{f}} dx = \int_I \bar{g} f dx = \langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

La (ii) segue dalla proprietà di linearità dell'integrale di Lebesgue.

**Corollario 1** Se  $f, g, h \in L^2(I)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$  si ha:

$$\langle h, \alpha f + \beta g \rangle = \bar{\alpha} \langle h, f \rangle + \bar{\beta} \langle h, g \rangle.$$

**Dimostrazione.** Usando la (i) e la (ii) si ha:

$$\begin{aligned} \langle h, \alpha f + \beta g \rangle &= \overline{\langle \alpha f + \beta g, h \rangle} = \overline{\alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle} \\ &= \bar{\alpha} \langle h, f \rangle + \bar{\beta} \langle h, g \rangle. \end{aligned}$$

Sia  $N = \{\varphi\}_k, k = 0, \dots$ , un insieme numerabile di funzioni in  $L^2(I)$  tale che :

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = 0, n \neq m, \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = \|\varphi_n\|^2 > 0, n = 0, 1, \dots \quad (1.3)$$

Diremo che  $N$  è un insieme di funzioni *ortogonale* in  $L^2(I)$ . Diremo poi che  $N$  è *ortonormale* se oltre alle (3) risulta anche  $\|\varphi_n\|_2 = 1$ , per ogni  $n = 0, 1, \dots$ .

È facile verificare che se  $N$  è ortogonale allora per ogni fissato  $n$ ,  $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$

é linearmente indipendente. Infatti supponiamo che  $c_0, \dots, c_n$  siano costanti complesse tali che  $\sum_{j=0}^n c_j \varphi_j = 0$ , per quasi ogni  $x \in I$ . Allora per ogni  $k = 0, \dots, n$  si ha:

$$0 = \left\langle \sum_{j=0}^n c_j \varphi_j, \varphi_k \right\rangle = \sum_{j=0}^n c_j \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = c_k \|\varphi_k\|_2^2,$$

da cui essendo  $\|\varphi_k\|_2 > 0$  segue  $c_k = 0$ .

Sia  $S = \{e_0, e_1, e_2, \dots\} \subset L^2(I)$  un insieme tale che per ogni fissato  $n$  l'insieme  $S_n = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$  é linearmente indipendente. É allora possibile costruire un insieme  $N$  ortonormale,  $N = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$  tale che per ogni fissato  $n$ ,  $N_n = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  e  $S_n$  generano lo stesso sottospazio di  $L^2(I)$ . Il procedimento, noto come *processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt* consiste nel costruire  $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$  ponendo successivamente:

$$\varphi_0 = \frac{e_0}{\|e_0\|_2}, \quad \varphi_k = \frac{e_k - \sum_{j=0}^{k-1} \langle e_k, \varphi_j \rangle \varphi_j}{\|e_k - \sum_{j=0}^{k-1} \langle e_k, \varphi_j \rangle \varphi_j\|_2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

Osserviamo che le funzioni  $\varphi_k, k = 0, 1, \dots$ , sono ben definite a causa della lineare indipendenza del sistema  $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Inoltre non é difficile provare che  $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$  é ortonormale in  $L^2(I)$ .

## ESEMPI

(a) Consideriamo lo spazio  $L^2[-1, 1]$  ed il sottoinsieme  $S = \{e_0, e_1, \dots\}$  con  $e_n(x) = x^n, n = 0, 1, \dots$ . Il principio di identità dei polinomi implica che ogni sottoinsieme finito di  $S$  é linearmente indipendente. Ortogonalizzando in  $L^2[-1, 1]$  l'insieme  $S$  otteniamo un insieme ortonormale  $N = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$  i cui elementi sono polinomi detti *polinomi di Legendre*. Otteniamo per esempio  $\varphi_0 = \sqrt{2}/2, \varphi_1 = (\sqrt{3}/2)x$ , etc... Si può dimostrare che i polinomi di Legendre possono essere ottenuti con la *formula di Rodrigues* :

$$\|\varphi_n\|_2 \varphi_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.5)$$

L'espressione (5) può essere ottenuta cercando le soluzioni polinomiali dell'*equazione differenziale di Legendre* :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + k(k + 1)y = 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

- (b) Consideriamo lo spazio  $L^2(\mathbb{R})$  ed il sottoinsieme  $S = \{e_0, e_1, \dots\}$  con  $e_n(x) = x^n e^{-x^2/2}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . É facile mostrare che ogni sottoinsieme finito di  $S$  é linearmente indipendente. Ortogonalizzando in  $L^2(\mathbb{R})$  l'insieme  $S$ , otteniamo un insieme ortonormale  $N$  i cui elementi sono detti *funzioni di Hermite*.
- (c) Ortogonalizzando in  $L^2[0, +\infty[$  l'insieme  $S = \{e_0, e_1, \dots\}$  delle funzioni  $e_n(x) = x^n e^{-x}$ , si ottengono le *funzioni di Laguerre*.
- (d) Nello spazio  $L^2[-\pi, \pi]$  il sistema  $N = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ , con

$$\varphi_0(x) = 1/\sqrt{2\pi}, \quad \varphi_{2n-1}(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_{2n}(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad (1.6)$$

per  $n \in \mathbb{N}$  é un sistema ortonormale in  $L^2[-\pi, \pi]$  detto *sistema trigonometrico reale*.

Un sistema ortonormale di funzioni a valori in  $\mathbb{C}$  equivalente a (6) é dato dall'insieme  $\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , detto *sistema trigonometrico complesso*.

Lo studio del sistema trigonometrico occuperá gran parte di questo capitolo, perché é alla base della teoria delle Serie di Fourier.

## 1.2 Il problema della migliore approssimazione

Sia  $N = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$  un sistema ortonormale in  $L^2(I)$  e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione in  $L^2(I)$ . Posto  $V^n = \{v_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x), q.o.x \in I : a_k \in \mathbb{C}, k = 0, 1, \dots, n\}$ , il sottospazio generato da  $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ , il problema consiste nel minimizzare  $\|f - v_n\|_2$  al variare di  $v_n \in V^n$  cioè al variare della  $(n+1)$ -upla  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{(n+1)}$ . Se esiste un'unica  $\tilde{v}_n \in V^n$  tale che

$$\min_{v_n \in V^n} \|f - v_n\|_2 = \|f - \tilde{v}_n\|_2$$

allora  $\tilde{v}_n$  é detto *la proiezione di  $f$  su  $V^n$* .

É ovvio che se  $f \in V^n$  allora  $\tilde{v}_n = f$  minimizza  $\|f - v_n\|_2$  in  $V^n$  e che  $\min_{v_n \in V^n} \|f - v_n\|_2 = 0$ .

Il teorema seguente mostra che per ogni  $f \in L^2(I)$  esiste un'unica  $\tilde{v}_n \in V^n$  tale che  $\|f - \tilde{v}_n\|_2 = \min_{v_n \in V^n} \|f - v_n\|_2$  cioè ogni  $f \in L^2(I)$  possiede la proiezione sul sottospazio  $V^n$ . Tale proiezione é detta *combinazione lineare di migliore approssimazione ad  $f$  in  $V^n$* .

**Teorema 1** Siano  $N = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$  un sistema ortonormale in  $L^2(I)$  ed  $f \in L^2(I)$ . Posto per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\widehat{f}_k = \langle f, \varphi_k \rangle$  e, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n \widehat{f}_k \varphi_k(x), \quad v_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) \quad (x \in I)$$

risulta:

$$\|f - s_n\|_2 \leq \|f - v_n\|_2 \quad (1.7)$$

per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , ed il segno di uguaglianza sussiste se e solo se  $a_k = \widehat{f}_k$ , per ogni  $k = 0, 1, \dots$

**Dimostrazione.** Si tratta di provare che  $\min_{v_n \in V^n} \|f - v_n\|_2 = \|f - s_n\|_2$  cioè che la funzione delle  $(n+1)$ -variabili complesse  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  definita dalla  $F(a_0, a_1, \dots, a_n) = \|f - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k\|_2$  ammette minimo assoluto e che tale minimo é assunto solo in  $(\widehat{f}_0, \widehat{f}_1, \dots, \widehat{f}_n)$ .

Risulta anzitutto:

$$\begin{aligned} \|f - v_n\|_2^2 &= \langle f - v_n, f - v_n \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - \langle f, v_n \rangle - \langle v_n, f \rangle + \langle v_n, v_n \rangle \\ &= \|f\|_2^2 - \langle f, v_n \rangle - \overline{\langle f, v_n \rangle} + \|v_n\|_2^2. \end{aligned}$$

Applicando ora la proposizione 1 e il corollario 1, otteniamo

$$\|v_n\|_2^2 = \langle v_n, v_n \rangle = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n a_k \overline{a_j} \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \sum_{k=0}^n |a_k|^2$$

mentre  $\langle f, v_n \rangle = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} \langle f, \varphi_k \rangle = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} \widehat{f}_k$ . Pertanto:

$$\begin{aligned} \|f - v_n\|_2^2 &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \overline{a_k} \widehat{f}_k - \sum_{k=0}^n a_k \overline{\widehat{f}_k} + \sum_{k=0}^n |a_k|^2 \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n |\widehat{f}_k|^2 + \sum_{k=0}^n (a_k - \widehat{f}_k)(\overline{a_k} - \overline{\widehat{f}_k}) \quad (1.8) \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n |\widehat{f}_k|^2 + \sum_{k=0}^n |a_k - \widehat{f}_k|^2. \end{aligned}$$

Da questo segue che il minimo assoluto esiste ed é assunto se  $a_k = \widehat{f}_k$ , per ogni  $k = 0, 1, \dots, n$ .

I coefficienti  $\widehat{f}_k = \langle f, \varphi_k \rangle, k = 0, 1, 2, \dots$ , che realizzano le migliori approssimazioni di  $f$  al sottospazio  $V^n$ , per ogni  $n$ , si chiamano *coefficienti di Fourier di  $f$  rispetto al sistema ortonormale  $N$*  e la serie di funzioni  $\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k \varphi_k(x)$ , definita quasi ovunque, é detta *Serie di Fourier relativa ad  $N$* . La notazione  $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k \varphi_k(x)$ , significa che la serie a destra é la serie di Fourier associata ad  $f \in L^2(I)$  rispetto ad  $N$  e non implica alcuna proprietá di convergenza.

ESEMPIO Se  $N$  é il sistema trigonometrico reale (esempio d del par.1) la serie

$$\frac{1}{2} \widehat{f}_c(0) + \sum_{k=1}^{\infty} (\widehat{f}_c(k) \cos kx + \widehat{f}_s(k) \sin kx)$$

dove  $\widehat{f}_c(k), \widehat{f}_s(k)$ , sono definiti dalle

$$\widehat{f}_c(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, k = 0, 1, 2, \dots, \widehat{f}_s(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, k = 1, 2, \dots,$$

é la serie trigonometrica di Fourier generata da  $f$  o semplicemente la serie di Fourier di  $f$ .

### 1.3 Proprietá principali dei coefficienti di Fourier

Sussiste il seguente teorema:

**Teorema 2** (*Disuguaglianza di Bessel*) Siano  $N = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$  un sistema ortonormale in  $L^2(I)$ ,  $f \in L^2(I)$ . Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{f}_k|^2 \leq \|f\|_2^2. \quad (1.9)$$

Nella (9) vale il segno di uguaglianza se e solo se risulta:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - s_k\|_2 = 0,$$

dove le funzioni  $s_k$  sono le somme parziali della serie di Fourier di  $f$  relativa ad  $N$ .

**Dimostrazione** Se nella (8) poniamo  $a_k = \widehat{f}_k$  otteniamo:

$$\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n |\widehat{f}_k|^2 = \|f - s_n\|_2^2 \geq 0,$$

per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e quindi la (9) segue immediatamente. Ancora con la sostituzione  $a_k = \widehat{f}_k$  nella (8) otteniamo:

$$\|f - s_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n |\widehat{f}_k|^2,$$

da cui segue l'asserto.

La relazione (9) nel caso dell'uguaglianza é detta *identità di Parseval*.

**Corollario 2** Per ogni  $f \in L^2(I)$  e per ogni sistema ortonormale  $N = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ , la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{f}_k|^2$  é convergente e quindi  $\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{f}_k = 0$ .

ESEMPIO Se  $N$  é il sistema trigonometrico reale in  $L^2[-\pi, \pi]$  si ottiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0.$$

Il seguente risultato dovuto a Riesz e Fischer stabilisce un inverso del teorema precedente.

**Teorema 3** Sia  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  una successione di numeri complessi tale che  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$  e sia  $N = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$  un sistema ortonormale in  $L^2(I)$ . Esiste una funzione  $f \in L^2(I)$  tale che  $c_k = \widehat{f}_k = \langle f, \varphi_k \rangle, k = 0, 1, 2, \dots$

**Dimostrazione** Posto  $s_n = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k$ , si ha, per  $m > n$ ,

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\|_2^2 &= \langle s_n - s_m, s_n - s_m \rangle = \sum_{k=n+1}^m \sum_{j=n+1}^m c_k \overline{c_j} \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle \\ &= \sum_{k=n+1}^m |c_k|^2. \end{aligned}$$

Dalla convergenza della serie  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2$ , segue che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\bar{n}$  tale che per ogni  $n, m > \bar{n}$ ,  $\|s_n - s_m\|_2^2 < \varepsilon$ . La successione  $\{s_n\}$  é allora di Cauchy e siccome  $L^2(I)$  é completo, esiste  $f \in L^2(I)$  tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\|_2 = 0$ . Resta da provare che  $\widehat{f}_k = c_k$ . A tale scopo siano  $n, k$  con  $n \geq k$ . Usando l'ortonormalitá di  $N$  é facile vedere che  $\langle s_n, \varphi_k \rangle = c_k$  e quindi usando la disuguaglianza di Hölder, si ha:

$$\begin{aligned} |c_k - \widehat{f}_k| &= |\langle s_n, \varphi_k \rangle - \langle f, \varphi_k \rangle| = |\langle s_n - f, \varphi_k \rangle| \\ &\leq \|\varphi_k\|_2 \|s_n - f\|_2. \end{aligned}$$

Passando al limite per  $n \rightarrow \infty$  otteniamo  $|c_k - \widehat{f}_k| = 0$ , cioè l'asserto per l'arbitrarietá di  $k$ .

OSSERVAZIONE La funzione  $f \in L^2(I)$  la cui esistenza é assicurata dal teorema di Riesz-Fischer é tale che

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{f}_k|^2.$$

Questa é una diretta conseguenza del teorema 2.

Sia  $N = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$  un sistema ortonormale in  $L^2(I)$ . Se per ogni  $f \in L^2(I)$  sussiste l'identitá di Parseval, diremo che  $N$  é un *sistema completo* o una *base* in  $L^2(I)$ . In tal caso, per il teorema 2, ogni  $f \in L^2(I)$  é limite in  $L^2(I)$  della successione delle somme parziali

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n \widehat{f}_k \varphi_k(x), \quad x \in I$$

e viceversa. Se  $N$  é un sistema completo, scriveremo allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k \varphi_k(x)$$

per denotare  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\|_2 = 0$ .

ESEMPIO Il sistema trigonometrico in forma reale o complessa é completo in  $L^2([-\pi, \pi])$ . Questo sará provato in parte dopo il teorema di Fejer.

## 1.4 Il sistema trigonometrico. La trasformata finita di Fourier

Consideriamo lo spazio  $L^2[-\pi, \pi]$  ed il sistema trigonometrico

$$N = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1,2,\dots}$$

La corrispondente serie di Fourier di  $f \in L^2[-\pi, \pi]$  si scrive allora

$$f \sim \frac{1}{2} \widehat{f}_c(0) + \sum_{k=1}^{\infty} (\widehat{f}_c(k) \cos kx + \widehat{f}_s(k) \sin kx),$$

dove

$$\widehat{f}_c(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \widehat{f}_s(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Se scriviamo la serie di Fourier di  $f$  rispetto al sistema (trigonometrico) complesso  $N = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}_{n \in \mathbf{Z}}$ , otteniamo

$$f \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_k e^{ikx},$$

dove i coefficienti  $\widehat{f}_k$  sono dati dalle formule:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (1.10)$$

In generale una generica serie trigonometrica a coefficienti reali  $\{a_k\}$ ,  $\{b_k\}$ , definita dalla:

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1.11)$$

puó essere scritta nella forma complessa (almeno formalmente) usando le formule di Eulero:

$$\cos kx = \frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx}), \quad \sin kx = \frac{1}{2i} (e^{ikx} - e^{-ikx}),$$



e ponendo  $a_{-k} = a_k$ ,  $b_{-k} = -b_k$ ,  $b_0 = 0$ ,  $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

Con queste posizioni, otteniamo la serie:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \quad (1.12)$$

le cui somme parziali si scrivono  $s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ .

Viceversa dalla (12) si può ottenere la (10) ponendo

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Queste posizioni giustificano la forma di  $\widehat{f}_k$  nella (10).

Ora osserviamo che i coefficienti  $\widehat{f}_c(k)$ ,  $\widehat{f}_s(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  e  $\widehat{f}_k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , hanno senso anche se  $f \in L^1([-\pi, \pi])$ ; infatti, per esempio,  $|f(x) \cos kx| \leq |f(x)|$ , quasi ovunque in  $[-\pi, \pi]$ . Così ad ogni  $f \in L^1([-\pi, \pi])$  può essere associata la serie di Fourier rispetto al sistema trigonometrico (reale o complesso).

Se  $f \in L^1([-\pi, \pi])$ , la successione  $\{\widehat{f}_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  si chiama *trasformata finita di Fourier di  $f$* . La serie di Fourier di  $f$  in forma complessa:

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_k e^{ikx} \quad (1.13)$$

può essere vista almeno formalmente, come una formula di inversione della trasformata finita di Fourier; una formula cioè che consenta di ricostruire la  $f$  a partire dalla successione  $\{\widehat{f}_k\}$ . Il problema della ricostruzione di  $f$  a partire dai coefficienti  $\widehat{f}_k$  è di grande importanza nelle applicazioni, specie nella teoria dei segnali. Perciò dovremo occuparci dello studio della convergenza delle serie di Fourier.

Se ad esempio sapessimo che  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}_k| < +\infty$ , allora la serie (13) convergerebbe uniformemente ad una funzione  $g$  continua e periodica di periodo  $2\pi$  in  $[-\pi, \pi]$ . Ma questo non risolve ancora il nostro problema. Dopo il teorema di Fejer proveremo che, nelle ipotesi dette,  $f = g$  q.o. in  $[-\pi, \pi]$ .

Per il momento limitiamoci ad elencare alcune semplici proprietà della trasformata finita di Fourier.

**Proposizione 2** *Se  $f, g \in L^1([-\pi, \pi])$  si hanno le seguenti proprietà:*

- (i) Posto, per ogni  $h \in \mathbb{R}$ ,  $\tau_h f(x) = f(x+h)$ , si ha  $(\widehat{\tau_h f})_k = e^{ikh} \widehat{f}_k$ ;
- (ii) Posto  $g(x) = e^{-ihx} f(x)$ ,  $g \in L^1([-\pi, \pi])$ , si ha  $\widehat{g}_k = \widehat{f}_{h+k}$ ,  $h \in \mathbb{Z}$ .
- (iii) Posto  $(\tau_- f)(x) = \overline{f(-x)}$ , si ha  $(\widehat{\tau_- f})_k = \overline{\widehat{f}_k}$ ;
- (iv)  $(\widehat{f+g})_k = \widehat{f}_k + \widehat{g}_k$ ,  $(\widehat{cf})_k = c\widehat{f}_k$ , per  $c \in \mathbb{C}$ ;
- (v)  $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{f}_k = 0$ .

**Dimostrazione.** Le proprietà (i), (ii), (iii), (iv) sono semplici conseguenze delle definizioni. Osserviamo soltanto che nella (i) la  $f$  è prolungata con periodicità  $2\pi$  a tutto  $\mathbb{R}$ .

La (v) è una conseguenza del corollario 2, nel caso  $f \in L^2([-\pi, \pi])$ . Nel caso generale è possibile fornire una prova diretta facendo uso del seguente lemma del quale non riportiamo la dimostrazione:

**Lemma 1** Se  $f \in L^1([-\pi, \pi])$  allora

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_1 = 0$$

dove  $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$ , ed  $f$  è estesa con periodicità  $2\pi$  fuori dell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ .

Proviamo ora la (v). Per ogni  $k \in \mathbb{Z}$  con  $k \neq 0$  risulta:

$$\begin{aligned} 2\pi|\widehat{f}_k| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \frac{\pi}{k}) e^{-ikx} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x + \frac{\pi}{k})| dx. \end{aligned}$$

Dato che  $\pi/k \rightarrow 0$  per  $|k| \rightarrow \infty$ , l'asserto segue dal Lemma precedente.

Concludiamo questo paragrafo osservando che dalla definizione di  $\widehat{f}_k$  segue anche che  $|\widehat{f}_k| \leq (2\pi)^{-1} \|f\|_1$  per ogni  $f \in L^1([-\pi, \pi])$ . Viceversa è possibile dimostrare che esistono successioni  $\{c_k\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , con  $|c_k| \leq M$ , per ogni  $k \in \mathbb{Z}$  ed un fissato  $M$  e tali che  $\lim_{|k| \rightarrow \infty} c_k = 0$ , ma che non sono la trasformata di alcuna funzione  $f \in L^1([-\pi, \pi])$ .

Il risultato seguente esprime la trasformata di Fourier della derivata di una funzione  $f$  assolutamente continua in termini di quella di  $f$  stessa:

**Proposizione 3** *Sia  $f$  assolutamente continua in  $[-\pi, \pi]$  e  $2\pi$ -periodica, allora:*

$$\widehat{f}'_k = (ik)\widehat{f}_k, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (1.14)$$

**Dimostrazione** Poiché  $f$  é assolutamente continua,  $f'$  esiste quasi ovunque ed é sommabile in  $[-\pi, \pi]$ . Inoltre, integrando per parti e utilizzando la periodicitá:

$$2\pi\widehat{f}'_k = [f(x)e^{-ikx}]_{-\pi}^{\pi} + ik \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} dx = 2\pi ik\widehat{f}_k,$$

e quindi la (14).

La formula (14) puó essere generalizzata in questo modo: se  $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ ,  $n > 1$ , esistono e sono assolutamente continue in  $[-\pi, \pi]$ , allora esiste quasi ovunque  $f^{(n)}$ , é sommabile in  $[-\pi, \pi]$  e risulta:

$$\widehat{f_k^{(n)}} = (ik)^n \widehat{f}_k \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (1.15)$$

La (15) puó essere dimostrata, a partire dalla (14), usando il principio di induzione. Se nella (15) prendiamo i moduli, otteniamo  $|\widehat{f_k^{(n)}}| = |k|^n |\widehat{f}_k|$  e poiché  $|\widehat{f_k^{(n)}}|$  tende a 0 quando  $|k| \rightarrow \infty$ , si ottiene:

$$|\widehat{f}_k| = o(|k|^{-n}), \quad |k| \rightarrow \infty. \quad (1.16)$$

Questo mette in evidenza che piú é regolare la  $f$ , maggiore diventa l'ordine di infinitesimo della successione  $\{\widehat{f}_k\}$ .

É possibile mostrare anche un "viceversa": se  $f \in L^1([-\pi, \pi])$  é tale che esistono un intero  $n \in \mathbf{N}$  ed una funzione  $g \in L^1([-\pi, \pi])$  con  $(ik)^n \widehat{f}_k = \widehat{g}_k$ , allora  $f$  é quasi ovunque uguale ad una funzione  $\varphi$  tale che  $\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)}$  sono assolutamente continue in  $[-\pi, \pi]$ . Cioé maggiore é l'ordine di infinitesimo di  $\widehat{f}_k$ , maggiore é il grado di regolaritá della  $f$ .

# Chapter 2

## Convoluzioni in $\mathbb{R}$

### 2.1 Notazioni e risultati preliminari

Denoteremo con  $\mathcal{C}$  lo spazio di tutte le funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente continue e limitate in  $\mathbb{R}$ , con la norma usuale:

$$\|f\|_{\mathcal{C}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|. \quad (2.1)$$

Con  $L^p$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , denoteremo lo spazio di tutte le funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $|f|^p$  sia integrabile secondo Lebesgue su  $\mathbb{R}$ .

Per  $f \in L^p$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , definiamo:

$$\|f\|_p = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|^p du \right\}^{1/p} \quad (2.2)$$

Con  $L^\infty$  denotiamo lo spazio di tutte le funzioni misurabili secondo Lebesgue ed essenzialmente limitate, con la norma:

$$\|f\|_\infty = \text{ess. sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|. \quad (2.3)$$

Il fattore  $1/\sqrt{2\pi}$  nella (2) é molto conveniente nell'analisi di Fourier; esso é tuttavia omissso in molte trattazioni.

Lo spazio  $NL^1$  é l'insieme delle funzioni  $f \in L^1$  che sono *normalizzate* cioé tali che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du = \sqrt{2\pi}.$$

Accanto alle note proprietà degli spazi  $L^p$ , per le quali si rimanda il lettore ad un testo di *Analisi Reale*, menzioniamo qui un teorema fondamentale per quanto seguirá. Con  $X(\mathbb{R})$  denoteremo uno degli spazi  $L^p$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , o  $\mathcal{C}$ .

**Teorema 1** (*Minkowski*) Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione misurabile in  $\mathbb{R}^2$ . Se la funzione  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  definita dalla:

$$y \mapsto \|f(\cdot, y)\|_{X(\mathbb{R})}$$

é in  $L^1$ , allora:

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} f(\cdot, y) dy \right\|_{X(\mathbb{R})} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \|f(\cdot, y)\|_{X(\mathbb{R})} dy. \quad (2.4)$$

**Dimostrazione** Omessa. Osserviamo soltanto che la (4) non é altro che una estensione della classica disuguaglianza di Minkowski.

ESEMPIO Sia  $X(\mathbb{R}) = L^1$ . In tal caso la funzione  $g$  é definita dalla:

$$g(y) = \|f(\cdot, y)\|_{X(\mathbb{R})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)| dx.$$

Pertanto dalla (4) si ricava:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)| dx \right\} dy.$$

Anche il prossimo teorema esprime un risultato di grande importanza.

**Teorema 2** (*continuitá in media*) Se  $f \in X(\mathbb{R})$ , segue che:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{X(\mathbb{R})} = 0.$$

**Dimostrazione** Omessa. Osserviamo che il teorema 2 **non sussiste** in generale per lo spazio  $L^\infty$ . É sufficiente considerare ad esempio una funzione "step" limitata.

## 2.2 Convoluzioni in $\mathbb{R}$

Siano  $f, g$  due funzioni definite su  $\mathbb{R}$  e misurabili su  $\mathbb{R}$ . L'espressione:

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u) g(u) du \quad (2.5)$$

é detta *convoluzione* di  $f$  e  $g$ .

**Teorema 3** Sia  $f \in L^p$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$  e  $g \in L^{p'}$ , con  $p^{-1} + p'^{-1} = 1$ . Allora  $f \star g \in \mathcal{C}$  e risulta:

$$\|f \star g\|_{\mathcal{C}} \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \quad (2.6)$$

Inoltre, se  $1 < p < +\infty$ ,  $f \star g \in \mathcal{C}_0$ , cioè  $f \star g \in \mathcal{C}$  e  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f \star g)(x) = 0$ . Se  $g \in \mathcal{C}_0$ , lo stesso vale per  $p = 1$ .

**Dimostrazione** Sia  $1 \leq p < +\infty$ . Poiché, in virtù della disuguaglianza di Hölder,  $|(f \star g)(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$ , la convoluzione  $f \star g$  esiste per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Inoltre:

$$\begin{aligned} & \sqrt{2\pi} |(f \star g)(x+h) - (f \star g)(x)| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+h-u) g(u) du - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u) g(u) du \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h-u) - f(x-u)| |g(u)| du \\ &\leq \sqrt{2\pi} \|f(\cdot+h) - f(\cdot)\|_p \|g\|_{p'}, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato nuovamente la disuguaglianza di Hölder. Dunque in virtù del teorema 2, applicato con  $X(\mathbb{R}) = L^p$ , segue  $(f \star g) \in \mathcal{C}$ . É ovvio inoltre che sussiste la (6). Se  $p = +\infty$ , la dimostrazione é una conseguenza immediata della continuità in norma dell'operatore di traslazione in  $L^1$ , dopo aver applicato la commutatività del prodotto di convoluzione (cfr. la proprietà (i) dopo il Teorema 4). Sia ora  $1 < p < +\infty$ . Dato  $\varepsilon > 0$  esiste un  $a > 0$  tale che:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|u| \geq a} |f(u)|^p du &\leq \varepsilon^p, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|u| \geq a} |g(u)|^{p'} du &\leq \varepsilon^{p'}. \end{aligned}$$

Se  $x \in \mathbb{R}$  é tale che  $|x| > 2a$ , allora  $[x - a, x + a] \subset \{u : |u| > a\}$  e quindi:

$$\begin{aligned}
|(f \star g)(x)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-a}^a + \int_{|u|>a} \right\} |f(x-u) g(u)| du \\
&\leq \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a |f(x-u)|^p du \right\}^{1/p} \|g\|_{p'} + \|f\|_p \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|u|>a} |g(u)|^{p'} du \right\}^{1/p'} \\
&\leq \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x-a}^{x+a} |f(u)|^p du \right\}^{1/p} \|g\|_{p'} + \varepsilon \|f\|_p \\
&\leq \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|u|>a} |f(u)|^p du \right\}^{1/p} \|g\|_{p'} + \varepsilon \|f\|_p \\
&\leq (\|g\|_{p'} + \|f\|_p) \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ciò implica che  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |(f \star g)(x)| = 0$ , cioè  $f \star g \in \mathcal{C}_0$ .

La dimostrazione é analoga nel caso  $p = 1$ ,  $g \in \mathcal{C}_0$ .

Un altro risultato é fornito dal seguente teorema del quale non riportiamo la dimostrazione che, peraltro, é sostanzialmente analoga a quella del teorema 3.

**Teorema 4** Sia  $f \in X(\mathbb{R})$  e  $g \in L^1$ . Allora  $(f \star g)(x)$  esiste finito,  $f \star g \in X(\mathbb{R})$  e :

$$\|f \star g\|_{X(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{X(\mathbb{R})} \|g\|_1. \quad (2.7)$$

Riportiamo ora alcune proprietà interessanti dell'operazione di convoluzione. Siano  $f, g, h \in L^1$ . Risulta:

- (i)  $f \star g = g \star f$ , (il prodotto di convoluzione é commutativo).
- (ii)  $f \star (g + h) = f \star g + f \star h$ , (il prodotto di convoluzione é distributivo rispetto alla somma).
- (iii)  $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$ , (sussiste la proprietà associativa).
- (iv) Se  $T_a$  definisce l'operatore di traslazione con  $a \in \mathbb{R}$ , cioè  $(T_a f)(x) = f(x + a)$ , allora  $T_a(f \star g) = T_a f \star g$ , (la convoluzione é invariante per traslazioni).

Le dimostrazioni sono semplici conseguenze della definizione. Osserviamo soltanto che nella (iii) il prodotto  $(f \star g) \star h$  é ben definito poiché essendo  $f, g \in L^1$ , anche  $f \star g \in L^1$  (teorema 4).

## 2.3 Funzioni periodiche e loro convoluzioni

Una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice  $2\pi$ -periodica se per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x+2\pi) = f(x)$ . Se  $f$  é definita su un intervallo finito  $[a, b[$ , attraverso una sostituzione lineare é possibile ottenere una funzione definita in  $[-\pi, \pi[$ , che puó essere estesa a tutto  $\mathbb{R}$  con periodicitá  $2\pi$ .

Senza perdita di generalitá, quando si estende  $f$  a tutto  $\mathbb{R}$ , si puó assumere  $f(-\pi) = f(\pi)$ .

Denotiamo con  $\mathcal{C}_{2\pi}$  lo spazio di tutte le funzioni  $2\pi$ -periodiche, continue. Si pone:

$$\|f\|_{\mathcal{C}_{2\pi}} = \sup_{|x| \leq \pi} |f(x)|. \quad (2.8)$$

Ovviamente  $\mathcal{C}_{2\pi} \subset \mathcal{C}$  e  $\|f\|_{\mathcal{C}_{2\pi}} = \|f\|_{\mathcal{C}}$ ,  $\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ .

La stessa osservazione si applica alla classe  $L_{2\pi}^\infty$  cioè l'insieme di tutte le funzioni  $2\pi$ -periodiche, misurabili secondo Lebesgue, tali che:

$$\|f\|_{L_{2\pi}^\infty} = \text{ess. sup}_{|x| \leq \pi} |f(x)| < +\infty. \quad (2.9)$$

La situazione é molto differente per le classi  $L_{2\pi}^p$   $1 \leq p \leq +\infty$ , di tutte le funzioni  $2\pi$ -periodiche, la cui  $p$ -esima potenza é integrabile secondo Lebesgue su  $[-\pi, \pi]$ , con:

$$\|f\|_{L_{2\pi}^p} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(u)|^p du \right\}^{1/p} < +\infty. \quad (2.10)$$

Prescindendo dalle funzioni quasi ovunque nulle, si ha  $L^p \cap L_{2\pi}^p = \emptyset$ ,  $1 \leq p < +\infty$ . Per semplicitá di scrittura porremo:  $\|f\|_{L_{2\pi}^p} = \|f\|_p$ .

Poiché l'integrale in (10) é esteso ad un intervallo finito, si ha  $L_{2\pi}^p \subset L_{2\pi}^q$ , per ogni  $p > q$ . In particolare  $L_{2\pi}^p \subset L_{2\pi}^1$ , per ogni  $p > 1$ .

Inoltre si ha:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(u) du = \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(u) du, \quad (2.11)$$



per ogni  $a \in \mathbb{R}$ . Infatti, posto  $u = v + 2\pi$ , si ha:

$$\int_{\pi}^{a+\pi} f(u)du = \int_{-\pi}^{a-\pi} f(v)dv$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(u)du &= \left\{ \int_{a-\pi}^{-\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} + \int_{\pi}^{a+\pi} \right\} f(u)du \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(u)du. \end{aligned}$$

Inversamente, é possibile dimostrare che se (11) vale per ogni  $a \in \mathbb{R}$ , allora  $f$  é  $2\pi$ - periodica.

Nel seguito  $X_{2\pi}$  denoterá sempre uno degli spazi  $\mathcal{C}_{2\pi}$ ,  $L_{2\pi}^p$ ,  $1 \leq p < +\infty$ .

Ovviamente sussistono gli analoghi dei teoremi visti in precedenza. In particolare si ha:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0, \quad \forall f \in X_{2\pi}.$$

Se  $f, g$  sono due funzioni  $2\pi$ - periodiche definiamo la loro *convoluzione* ponendo:

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) g(u)du \quad (2.12)$$

Sussiste il seguente:

**Teorema 5** (i) Sia  $f \in L_{2\pi}^p$ ,  $1 \leq p < +\infty$ ,  $g \in L_{2\pi}^{p'}$ ,  $p^{-1} + p'^{-1} = 1$ . Allora  $(f \star g)(x)$  esiste quasi ovunque,  $f \star g \in \mathcal{C}_{2\pi}$ , e

$$\|f \star g\|_{\mathcal{C}_{2\pi}} \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

(ii) Sia  $f \in X_{2\pi}$ ,  $g \in L_{2\pi}^1$ . Allora  $(f \star g)(x)$  esiste quasi ovunque,  $f \star g \in X_{2\pi}$  e

$$\|f \star g\|_{X_{2\pi}} \leq \|f\|_{X_{2\pi}} \|g\|_1.$$

Il teorema seguente rappresenta una proprietá fondamentale della trasformata finita di Fourier: questa trasforma il prodotto di convoluzione  $f \star g$  nel prodotto (usuale) delle trasformate  $\hat{f}$ ,  $\hat{g}$ .

**Teorema 6** Se  $f, g \in L^1([-\pi, \pi])$  allora:

$$(\widehat{f \star g})_k = \widehat{f}_k \widehat{g}_k, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad (2.13)$$

dove  $f, g$  sono estese con periodicit   $2\pi$  a tutto  $\mathbb{R}$ .

**Dimostrazione** Usando il teorema 5(ii),  $f \star g \in L^1([-\pi, \pi])$  e risulta, per ogni  $k \in \mathbf{Z}$  :

$$\begin{aligned} (\widehat{f \star g})_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f \star g)(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u)du \right\} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u)e^{-iku} f(x-u)e^{-ik(x-u)} du \right\} dx. \end{aligned}$$

Applicando ora il teorema di Fubini-Tonelli, otteniamo:

$$(\widehat{f \star g})_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u)e^{-iku} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)e^{-ik(x-u)} dx \right\} du.$$

Operando la sostituzione  $x - u = t$  nell'integrale interno e tenendo conto della periodicit  di  $f(x)e^{-ikx}$  si ottiene la (13).

## 2.4 Due teoremi di Analisi Funzionale

Si presuppongono noti gli elementi di base della teoria degli spazi di Banach.

Sia  $\{T_n\}$  una successione di operatori lineari continui  $T_n : X \rightarrow Y$ , con  $X, Y$  spazi di Banach. Diciamo che  $T_n$  converge fortemente ad un operatore  $T : X \rightarrow Y$ , se risulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n f - T f\|_Y = 0, \quad (2.14)$$

per ogni  $f \in X$ .

Analogamente diciamo che  $\{T_n\}$    fortemente di Cauchy se risulta:

$$\lim_{m, n \rightarrow +\infty} \|T_n f - T_m f\|_Y = 0, \quad (2.15)$$

per ogni  $f \in X$ .

Se indichiamo con  $\mathcal{L}(X, Y)$  la classe di tutti gli operatori lineari continui  $T : X \rightarrow Y$ , definiamo la norma di  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  ponendo:

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf\|_Y}{\|f\|_X} = \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|Tf\|_Y.$$

La successione  $\{T_n\}$  converge uniformemente a  $T$  in  $\mathcal{L}(X, Y)$  se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n - T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = 0.$$

Un sottoinsieme  $A \subset X$  si dice *denso* in  $X$  se per ogni  $f \in X$  ed  $\varepsilon > 0$ , esiste  $g \in A$  tale che  $\|f - g\|_X < \varepsilon$ .

L'insieme  $A \subset X$  si dice *fondamentale* in  $X$  se la varietà lineare generata da  $A$  (cioè l'insieme di tutte le combinazioni lineari finite di elementi di  $A$ ) è densa in  $X$ .

Sussiste il seguente teorema:

**Teorema 7** (*Principio della limitatezza uniforme*) Sia  $\{T_n\}$  una successione di operatori lineari limitati da uno spazio di Banach  $X$  in uno spazio normato  $Y$ . Se  $\{\|T_n f\|_Y\}$  è una successione limitata per ogni  $f \in X$ , separatamente, cioè per ogni  $f \in X$  esiste una costante  $M_f$  tale che per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , risulta:

$$\|T_n f\|_Y \leq M_f, \quad (2.16)$$

allora la successione  $\{\|T_n\|_{\mathcal{L}(X, Y)}\}$  è limitata, cioè esiste una costante  $M$  tale che:

$$\|T_n f\|_Y \leq M \|f\|_X, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in X.$$

Il seguente teorema è di grande importanza:

**Teorema 8** (*Banach - Steinhaus*)

- (a) Una successione  $\{T_n\}$  di operatori lineari limitati da uno spazio di Banach  $X$  in uno spazio di Banach  $Y$  converge fortemente a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  se e solo se (i) esiste una costante  $M > 0$  tale che  $\|T_n\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq M$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ; (ii) esiste un sottoinsieme denso  $A \subset X$  tale che  $\{T_n\}$  è fortemente di Cauchy su  $A$ .

(b) Sia  $X$  uno spazio di Banach,  $\{T_n\}$  una successione di operatori lineari continui di  $X$  in sé. Allora per ogni  $f \in X$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n f - f\|_X = 0, \quad (2.17)$$

se e solo se (i) esiste  $M > 0$  tale che  $\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq M$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ; (ii) esiste un sottoinsieme  $A \subset X$  denso, tale che (17) vale per ogni  $g \in A$ .

## 2.5 Integrali singolari di funzioni periodiche

Sia  $\rho$  un parametro che varia in un insieme  $\mathbf{A}$  che é o un intervallo  $(a, b)$ ,  $0 \leq a < b \leq +\infty$ , oppure l'insieme  $\mathbb{N}$ , e sia  $\rho_0$  uno dei punti  $a, b, +\infty$ .

Un insieme di funzioni  $\{\chi_\rho(x)\}$  é detto *nucleo* se  $\chi_\rho \in L^1_{2\pi}$  per ogni  $\rho \in \mathbf{A}$  e

$$\int_{-\pi}^{\pi} \chi_\rho(u) du = 2\pi. \quad (2.18)$$

Noi diciamo che  $\{\chi_\rho(x)\}$  é *limitato* se  $\chi_\rho \in L^\infty_{2\pi}$ ; *continuo* se  $\chi_\rho \in \mathcal{C}_{2\pi}$ ; *pari* se  $\chi_\rho(x) = \chi_\rho(-x)$ , quasi ovunque; *positivo* se  $\chi_\rho(x) \geq 0$  quasi ovunque; tutte le definizioni poste devono essere valide per ogni  $\rho \in \mathbf{A}$ .

Sia  $f \in X_{2\pi}$  e  $\{\chi_\rho\}$  un nucleo. L'operatore integrale della forma:

$$I_\rho(f; x) = (f \star \chi_\rho)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \chi_\rho(u) du \quad (2.19)$$

si dice un *integrale singolare (periodico)*.

Diciamo che  $I_\rho$  é positivo, se il corrispondente nucleo  $\chi_\rho$  é positivo.

Sussiste il seguente:

**Teorema 9** Se  $f \in X_{2\pi}$  e  $\{\chi_\rho(x)\}$  é un nucleo, allora  $I_\rho(f; x) \in X_{2\pi}$  per ogni  $\rho \in \mathbf{A}$  e:

$$\|I_\rho(f; \cdot)\|_{X_{2\pi}} \leq \|\chi_\rho\|_1 \|f\|_{X_{2\pi}}. \quad (2.20)$$

Inoltre se il nucleo é limitato,  $I_\rho(f; x)$  é continuo in  $x$  cioé appartiene a  $\mathcal{C}_{2\pi}$ .

**Dimostrazione** È una conseguenza del teorema 5.

Ponendo  $I_\rho(f; x) = [I_\rho f](x)$ ,  $\rho \in \mathbf{A}$ , gli integrali (19) definiscono un operatore lineare  $I_\rho : X_{2\pi} \rightarrow X_{2\pi}$ .

Ci proponiamo ora di studiare la convergenza forte degli operatori  $I_\rho$ . Di fondamentale importanza, a questo proposito, è la seguente definizione: un nucleo  $\{\chi_\rho(x)\}$  si dice *identità approssimata (periodica)* se, per qualche  $M > 0$  risulta:

$$(+) \quad \|\chi_\rho\|_1 \leq M, \quad \forall \rho \in \mathbf{A}.$$

(++) Per ogni  $0 < \delta < \pi$  si ha:

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_0} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} |\chi_\rho(u)| du = 0.$$

Da quanto precede si ricavano le definizioni di identità approssimata positiva, pari, limitata, continua.

**Teorema 10** *Se il nucleo dell'operatore integrale (19) è una identità approssimata, allora per ogni  $f \in X_{2\pi}$ , risulta:*

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_0} \|I_\rho(f; \cdot) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0. \quad (2.21)$$

**Dimostrazione** A causa della (20) e della (+), l'insieme degli operatori  $\{I_\rho\}$ , è uniformemente limitato rispetto a  $\rho$ . Dalla (18) si ha:

$$I_\rho(f; x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-u) - f(x)] \chi_\rho(u) du. \quad (2.22)$$

Se  $X_{2\pi} = C_{2\pi}$ , per ogni  $0 < \delta < \pi$  otteniamo:

$$\begin{aligned} \|I_\rho(f; \cdot) - f(\cdot)\|_{C_{2\pi}} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f(\cdot - u) - f(\cdot)\|_{C_{2\pi}} |\chi_\rho(u)| du \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{|u| \leq \delta} + \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} \right\} \|f(\cdot - u) - f(\cdot)\|_{C_{2\pi}} |\chi_\rho(u)| du \\ &\equiv I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Poiché  $f$  é uniformemente continua, ad ogni  $\varepsilon > 0$  corrisponde un  $\delta > 0$  tale che  $\|f(\cdot - u) - f(\cdot)\|_{C_{2\pi}} \leq \varepsilon$ , per ogni  $|u| \leq \delta$ . Questo implica  $I_1 \leq \varepsilon M$ . Fissiamo ora  $\delta$ . Allora:

$$I_2 \leq 2\|f\|_{C_{2\pi}} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} |\chi_\rho(u)| du.$$

In virtú della  $(++)$ ,  $I_2 \rightarrow 0$ ,  $\rho \rightarrow \rho_0$ . Pertanto la (21) vale nel caso  $X_{2\pi} = C_{2\pi}$ . Sia ora  $X_{2\pi} = L_{2\pi}^p$ ,  $1 \leq p < +\infty$ . In tal caso applicando il teorema 1, otteniamo:

$$\begin{aligned} \|I_\rho(f; \cdot) - f(\cdot)\|_p &= \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(\cdot - u) - f(\cdot)] \chi_\rho(u) du \right\|_p \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|(f(\cdot - u) - f(\cdot)) \chi_\rho(u)\|_p du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f(\cdot - u) - f(\cdot)\|_p |\chi_\rho(u)| du \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{|u| \leq \delta} + \int_{|u| > \delta} \right\} \|f(\cdot - u) - f(\cdot)\|_p |\chi_\rho(u)| du \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

In virtú del teorema 2,  $I_1 \leq \varepsilon M$ , mentre:

$$I_2 \leq 2\|f\|_p \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} |\chi_\rho(u)| du$$

da cui l'asserto.

Nel caso in cui  $X_{2\pi}$  é sostituito da  $L_{2\pi}^\infty$  il teorema 9 non sussiste in generale. Abbiamo invece il seguente:

**Teorema 11** *Sia  $f \in L_{2\pi}^\infty$ . Se il nucleo dell'integrale (19) é una identitá approssimata, allora per ogni  $s \in L_{2\pi}^1$ , si ha:*

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_0} \int_{-\pi}^{\pi} [I_\rho(f; x) - f(x)] s(x) dx = 0. \quad (2.24)$$

La dimostrazione é omessa.

### ESEMPIO Le medie integrali

Esse sono definite, per  $h \in ]0, 2\pi[$  dalla:

$$\mathcal{A}_h(f; x) = \frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} f(u) du = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f(x-u) du. \quad (2.25)$$

Ponendo  $\rho = h$ , e:

$$\chi_\rho(x) = \frac{2\pi}{h} \tau_{[-h/2, h/2]}(x), \quad (2.26)$$

avendo indicato con  $\tau_A$  la funzione caratteristica dell'insieme  $A$ , l'integrale (25) é del tipo (19). Il nucleo (26) é una identità approssimata e quindi si ha:

**Corollario 1** *Sia  $f \in X_{2\pi}$ . Allora  $\mathcal{A}_h(f; \cdot) \in X_{2\pi} \cap \mathcal{C}_{2\pi}$ , é tale che*

$$\|\mathcal{A}_h(f; \cdot)\|_{X_{2\pi}} \leq \|f\|_{X_{2\pi}},$$

*per ogni  $h \in (0, 2\pi)$ . Inoltre risulta:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathcal{A}_h(f; \cdot) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0.$$

Cosí, ad esempio, ogni funzione integrabile  $f$  puó essere approssimata in media da funzioni continue.

# Chapter 3

## Applicazioni alle serie trigonometriche di Fourier

### 3.1 Alcune relazioni preliminari

I seguenti teoremi di carattere elementare sono molto utili nello studio delle proprietà di convergenza delle serie di Fourier.

**Teorema 1** Per ogni reale  $x \neq 2m\pi$ ,  $m \in \mathbf{Z}$ , risulta:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{ikx} &= e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} e^{i(n+1)x/2} \end{aligned} \tag{3.1}$$

**Dimostrazione** La prima uguaglianza é banale; per la seconda si osservi che, mediante le formule di Eulero, si ha:

$$\begin{aligned} e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} &= \frac{e^{inx/2} - e^{-inx/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} e^{i(n+1)x/2} \\ &= \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} e^{i(n+1)x/2}. \end{aligned}$$

Prendendo nella (1) le parti reale ed immaginaria ed utilizzando una



opportuna formula di prostaferesi, si ha:

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \quad (3.2)$$

$$\sum_{k=1}^n \sin(kx) = \frac{\sin(nx/2) \sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \quad (3.3)$$

Come semplice corollario si ha il seguente:

**Teorema 2** Per ogni  $x \neq 2m\pi$ ,  $m \in \mathbf{Z}$ ,

$$\sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x = \frac{\sin(2nx)}{2 \sin x} \quad (3.4)$$

$$\sum_{k=1}^n \sin(2k-1)x = \frac{\sin^2(nx)}{\sin x} \quad (3.5)$$

**Dimostrazione** Basta osservare che per il teorema 1 risulta:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{i(2k-1)x} &= e^{-ix} \sum_{k=1}^n e^{ik(2x)} \\ &= \frac{\sin(nx)}{\sin x} e^{inx} \end{aligned}$$

e prendere le parti reale ed immaginaria.

**Teorema 3** Se  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , allora:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a_j = \sum_{k=1}^n (n+1-k) a_k \quad (3.6)$$

**Dimostrazione** Se  $n = 1$  la (6) é ovvia. Se é vera la (6), cambiando  $n$  con  $n+1$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=1}^k a_j &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a_j + \sum_{j=1}^{n+1} a_j = \sum_{k=1}^n (n+1-k) a_k + \sum_{j=1}^{n+1} a_j \\ &= \sum_{k=1}^n (n+2-k) a_k + a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (n+2-k) a_k. \end{aligned}$$

**Teorema 4** Se  $0 < r < 1$ , risulta:

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(kx) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} \quad (3.7)$$

**Dimostrazione** È noto che se  $z \in \mathbf{C}$  è tale che  $|z| < 1$ , si ha:

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{z}{1 - z}$$

pertanto :

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{1 + z}{1 - z}$$

Posto  $z = re^{ix}$ ,  $0 < r < 1$ , e prendendo nella precedente relazione le parti reale ed immaginaria, si ha la (7).

## 3.2 Serie di Fourier

Un *polinomio trigonometrico* di grado  $n \in \mathbb{N}$  è un'espressione del tipo:

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\} \quad (3.8)$$

dove  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ .

La classe di tutti i polinomi di grado  $n$  è denotata con  $\mathcal{T}_n$ .

La serie:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\} \quad (3.9)$$

è detta *serie trigonometrica*.

Applicando le formule di Eulero, le somme parziali si (9) si scrivono:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \{(a_k - ib_k) e^{ikx} + (a_k + ib_k) e^{-ikx}\}.$$

Definendo  $a_k, b_k, k \in \mathbf{Z}$ , con le posizioni:

$$\begin{aligned} a_{-k} &= a_k, & b_{-k} &= -b_k, & b_0 &= 0, \\ c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2}, & k &\in \mathbf{Z}, \end{aligned}$$

otteniamo:

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx},$$

che é la somma parziale *simmetrica* o *bilatera* della serie:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}. \quad (3.10)$$

La (10) é la forma complessa della serie trigonometrica (9).

Sia  $f \in L_{2\pi}^1$ . Se la serie (9) converge uniformemente ad  $f$  in  $[-\pi, \pi]$ , attraverso un teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, otteniamo:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos ku \, du, & k &= 0, 1, \dots, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin ku \, du, & k &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Una serie trigonometrica generata in questo modo da una funzione  $f \in L_{2\pi}^1$ , si dice *serie di Fourier* di  $f$ .

Per ogni  $f \in L_{2\pi}^1$ , i coefficienti  $a_k, b_k$  della serie di Fourier di  $f$  si chiamano i *coefficienti di Fourier di  $f$  in forma reale* e vengono denotati con  $\widehat{f}_c(k)$  e  $\widehat{f}_s(k)$  rispettivamente. I numeri:

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-iku} \, du, \quad k \in \mathbf{Z}$$

si dicono *coefficienti di Fourier di  $f$  in forma complessa*.

Le corrispondenti serie trigonometriche:

$$\begin{aligned} f &\sim \frac{1}{2} \widehat{f}_c(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \{ \widehat{f}_c(k) \cos kx + \widehat{f}_s(k) \sin kx \} \\ f &\sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}, \end{aligned}$$

sono rispettivamente le forme reale e complessa della serie di Fourier di  $f$ , con somme parziali date rispettivamente da:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{2} \widehat{f}_c(0) + \sum_{k=1}^n \{ \widehat{f}_c(k) \cos kx + \widehat{f}_s(k) \sin kx \}$$

$$\sum_{k=-n}^{k=n} \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

### 3.3 Convergenza delle serie di Fourier

Per studiare la convergenza delle serie di Fourier di una funzione  $f \in L^1_{2\pi}$  scriviamo le somme parziali  $S_n(f, x)$  in termini di "convoluzione". Si ha:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \{ \cos ku \cos kx + \sin ku \sin kx \} \right] du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos[k(x-u)] \right\} du.$$

In virtù della (2) otteniamo:

$$D_n(x) \equiv 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kx$$

$$= \begin{cases} \frac{\sin[(2n+1)x/2]}{\sin(x/2)}, & x \neq 2j\pi \\ 2n+1, & x = 2j\pi \end{cases}$$

con  $j \in \mathbf{Z}$ .

Da questo segue la seguente rappresentazione integrale per  $S_n$ :

$$S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_n(u) du \quad (3.11)$$

La successione di funzioni  $D_n(u)$  definisce il *nucleo di Dirichlet*, e l'integrale nella (11) si dice *integrale singolare di Dirichlet*.

Allo scopo di stabilire condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza delle serie di Fourier, premettiamo, senza dimostrazione, il seguente:

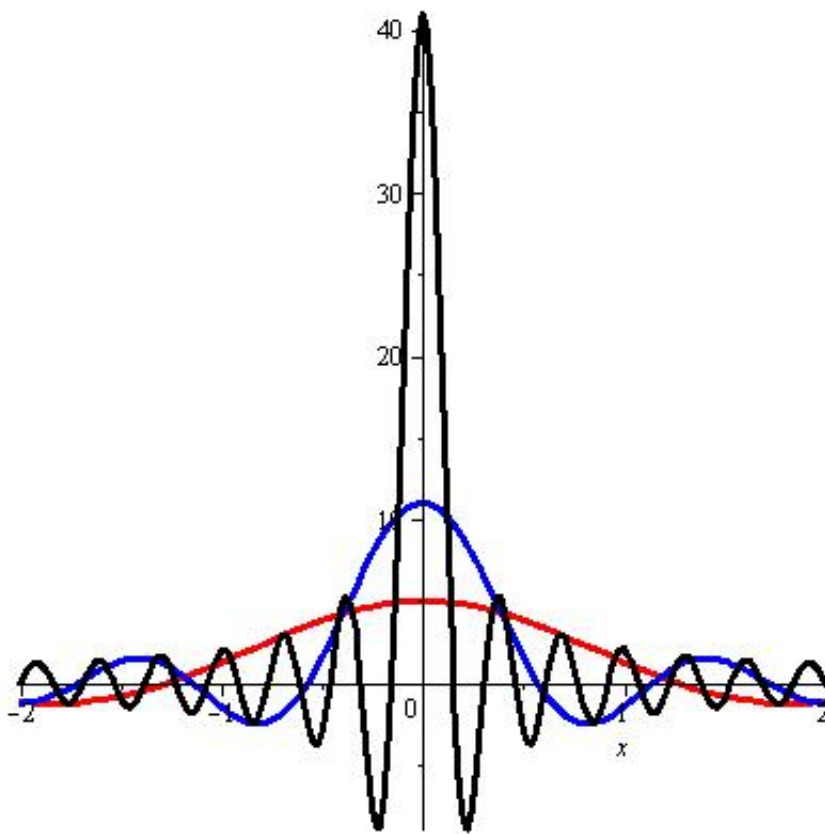


Figure 3.1: Il nucleo di Dirichlet con  $n = 2$  (rosso),  $n = 5$  (blu),  $n = 20$  (nero)

**Lemma 1** (Riemann-Lebesgue) Sia  $f \in L^1(a, b)$ ,  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ . Risulta:

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_a^b f(u) \cos \rho u du = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_a^b f(u) \sin \rho u du = 0. \quad (3.12)$$

Una conseguenza del lemma 1 é che se  $f \in L^1_{2\pi}$ , allora i coefficienti di Fourier di  $f$  tendono a zero, cioè:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \widehat{f}_c(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \widehat{f}_s(k) = 0.$$

**Teorema 5** (Localizzazione di Riemann) Sia  $f \in L^1_{2\pi}$ . La serie di Fourier di  $f$  converge in un punto  $x_0$  ad un fissato punto  $c$ , se e solo se per qualche  $\delta \in ]0, \pi[$ , risulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \{f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - 2c\} \frac{\sin((2n + 1)u/2)}{u} du = 0. \quad (3.13)$$

**Dimostrazione** Poniamo  $g(x_0, u) = f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - 2c$ . Si ha:

$$\begin{aligned} S_n(f, x_0) - c &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0 - u) - c] D_n(u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi} \right\} [f(x_0 - u) - c] D_n(u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} [f(x_0 + u) - c] D_n(u) du + \int_0^{\pi} [f(x_0 - u) - c] D_n(u) du \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\delta g(x_0, u) \frac{\sin((2n + 1)u/2)}{u} du \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^\delta g(x_0, u) \left[ \frac{1}{2 \sin(u/2)} - \frac{1}{u} \right] \sin((2n + 1)u/2) du \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi g(x_0, u) \frac{\sin((2n + 1)u/2)}{2 \sin(u/2)} du \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Si osservi ora che la funzione entro le parentesi quadre in  $I_2$  é limitata in  $]0, \delta[$ ; pertanto applicando il lemma 1, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_2 + I_3) = 0.$$

Da questo segue subito l'asserto.

**Corollario 1** (Dini) Sia  $f \in L^1_{2\pi}$ . Se esistono  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $\delta \in ]0, \pi[$  tali che :

$$\int_0^\delta |f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - 2f(x_0)| u^{-1} du < +\infty \quad (3.14)$$

allora risulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f, x_0) = f(x_0).$$

**Dimostrazione** Basta osservare che in tal caso la (13) sussiste con  $c = f(x_0)$ , a causa del lemma 1.

Il risultato espresso dal Corollario 1, ci dice che se vale la (14), per un certo  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $\delta > 0$ , allora la serie di Fourier di  $f$  converge ad  $f(x_0)$  nel punto  $x_0$ .

Un'ulteriore condizione sufficiente, deducibile dal teorema 5, é la seguente:

**Corollario 2** (Jordan) Sia  $f \in L^1_{2\pi}$  e supponiamo che  $f$  sia a variazione limitata in  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ,  $\delta > 0$ . Allora la serie di Fourier di  $f$  converge in  $x_0$  a:

$$\frac{1}{2} \{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)\}.$$

**Dimostrazione** Omessa.

Si osservi che le condizioni di Dini e Jordan non sono in generale implicate dalla sola continuit  di  $f$ . Esistono funzioni continue la cui serie di Fourier non converge in qualche punto. Se tuttavia  $f$  é assolutamente continua e  $2\pi$ -periodica, la serie di Fourier converge ad  $f$ , in ogni punto di  $\mathbb{R}$ , per il teorema di Jordan.

Sussiste inoltre il seguente teorema

**Teorema 6** Sia  $f$  una funzione assolutamente continua e  $2\pi$ -periodica. Se  $f' \in L^2([-\pi, \pi])$ , la serie di Fourier di  $f$  é uniformemente convergente ad  $f$  in  $\mathbb{R}$ .

**Dimostrazione** Scriviamo anzitutto i coefficienti di Fourier di  $f$  in termini di quelli di  $f' \in L^2([-\pi, \pi])$ . Integrando per parti, usando l'assoluta continuit  di  $f$  si ha:

$$\begin{aligned} \widehat{f}_c(k) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = -\frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx dx \\ &= -\frac{1}{k} \widehat{f}'_s(k), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

ed analogamente si ha  $\widehat{f}_s(k) = \widehat{f}'_c(k)/k$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Allora possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{f}_c(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|\widehat{f}_c(k)| + |\widehat{f}_s(k)|) & \quad (3.15) \\ = \frac{\widehat{f}_c(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{|\widehat{f}'_c(k)|}{k} + \frac{|\widehat{f}'_s(k)|}{k} \right) \end{aligned}$$

Dato che  $\frac{|\widehat{f}'_s(k)|}{k} \leq \frac{1}{2} \left[ (\widehat{f}'_s(k))^2 + \frac{1}{k^2} \right]$  ed analogamente per  $\frac{|\widehat{f}'_c(k)|}{k}$ , la serie al primo membro della (15) é maggiorata da:

$$\frac{|\widehat{f}_c(0)|}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (\widehat{f}'_s(k))^2 + (\widehat{f}'_c(k))^2 \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \quad (3.16)$$

Poiché  $f' \in L^2([-\pi, \pi])$  la serie (16) é convergente in virtù della disuguaglianza di Bessel e quindi é convergente la (15). Ma la (15) maggiora la serie di Fourier di  $f$  in  $\mathbb{R}$  che quindi é totalmente convergente.

### 3.4 Convergenza in norma

Sussiste il seguente:

**Teorema 7** *Se  $f \in X_{2\pi}$  risulta:*

$$\|S_n(f, \cdot)\|_{X_{2\pi}} \leq \|D_n\|_1 \|f\|_{X_{2\pi}}.$$

**Dimostrazione** É conseguenza del teorema 4 del Capitolo 2.

**Teorema 8** *Posto  $L_n = \|D_n\|_1$ , risulta:*

$$L_n = \frac{4}{\pi^2} \log n + \mathcal{O}(1), \quad n \rightarrow +\infty \quad (3.17)$$

**Dimostrazione** Omessa. Osserviamo soltanto che la (17) implica l'esistenza di una costante  $M > 0$  tale che:

$$|L_n - \frac{4}{\pi^2} \log n| \leq M,$$



per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Pertanto il teorema 8 ci dice che  $L_n \rightarrow +\infty$ ,  $n \rightarrow +\infty$ . Infatti dalla relazione precedente ricaviamo:

$$L_n \geq -M + \frac{4}{\pi^2} \log n;$$

Ancora, questo implica che  $\{D_n\}$  non é un'identitá approssimata e quindi non é possibile applicare il teorema 10 del Capitolo 2.

Sia  $f \in X_{2\pi}$  e sia  $S_k(f, x)$  la somma parziale  $k$ -esima della serie di Fourier di  $f$  calcolata nel punto  $x$ .

Definiamo *medie di Fejer* della serie di Fourier di  $f$  le somme:

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f, x). \quad (3.18)$$

Utilizzando la (11) e ponendo  $D_0 = 1$ , otteniamo facilmente la seguente rappresentazione integrale:

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(u) \right\} du. \quad (3.19)$$

Si ha:

$$\begin{aligned} F_n(x) &\equiv \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos(kx) \\ &= \begin{cases} (n+1)^{-1} \left( \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2, & x \neq 2j\pi \\ n+1 & x = 2j\pi \end{cases} \end{aligned}$$

con  $j \in \mathbf{Z}$ .

L'ultima relazione segue dal fatto che, per  $x \neq 2j\pi$ ,  $j \in \mathbf{Z}$ , risulta:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{n+1} \left[ 1 + \sum_{k=1}^n D_k(x) \right] \\ &= \frac{1}{n+1} \left[ 1 + \sum_{k=1}^n \left( 1 + 2 \sum_{j=1}^k \cos(jx) \right) \right] \\ &= \frac{1}{n+1} \left[ 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\sin((2k+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right] \end{aligned}$$

e quindi,

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \frac{1}{n+1} \left\{ 1 + \frac{1}{\sin(x/2)} \left[ \sum_{k=2}^{n+1} \sin((2k-1)x/2) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{n+1} \left\{ 1 + \frac{1}{\sin(x/2)} \left[ \frac{\sin^2((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} - \sin(x/2) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{n+1} \left[ \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right]^2
\end{aligned}$$

Pertanto la (18) si scrive:

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) F_n(u) du, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.20)$$

L'integrale nella (20) si chiama *integrale singolare di Fejer di  $f$*  e  $\{F_n\}$  é detto *nucleo di Fejer*.

Esso é positivo, pari, continuo, con parametro  $\rho = n$ ,  $\rho_0 = +\infty$ . Inoltre esso é una identitá approssimata poiché per  $0 < \delta < \pi$  risulta:

$$\sup_{\delta \leq |x| \leq \pi} |F(x)| \leq \frac{1}{(n+1) \sin^2(\delta/2)}.$$

Come conseguenza del teorema 10 del Cap. 1, risulta:

**Teorema 9** *Se  $f \in X_{2\pi}$ , allora:*

$$\begin{aligned}
\|\sigma_n(f, \cdot)\|_{X_{2\pi}} &\leq \|f\|_{X_{2\pi}} \\
\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\sigma_n(f, \cdot) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} &= 0.
\end{aligned}$$

Una conseguenza importante del teorema 9 é il seguente teorema di approssimazione:

**Teorema 10 (Weierstrass)** *L'insieme di tutti i polinomi trigonometrici forma un sottoinsieme fortemente denso di  $X_{2\pi}$ . In particolare se  $f \in C_{2\pi}$  allora dato  $\varepsilon > 0$  esistono un  $n \in \mathbb{N}$  ed un polinomio  $t_n$  di grado  $n$ , tali che:*

$$|f(x) - t_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

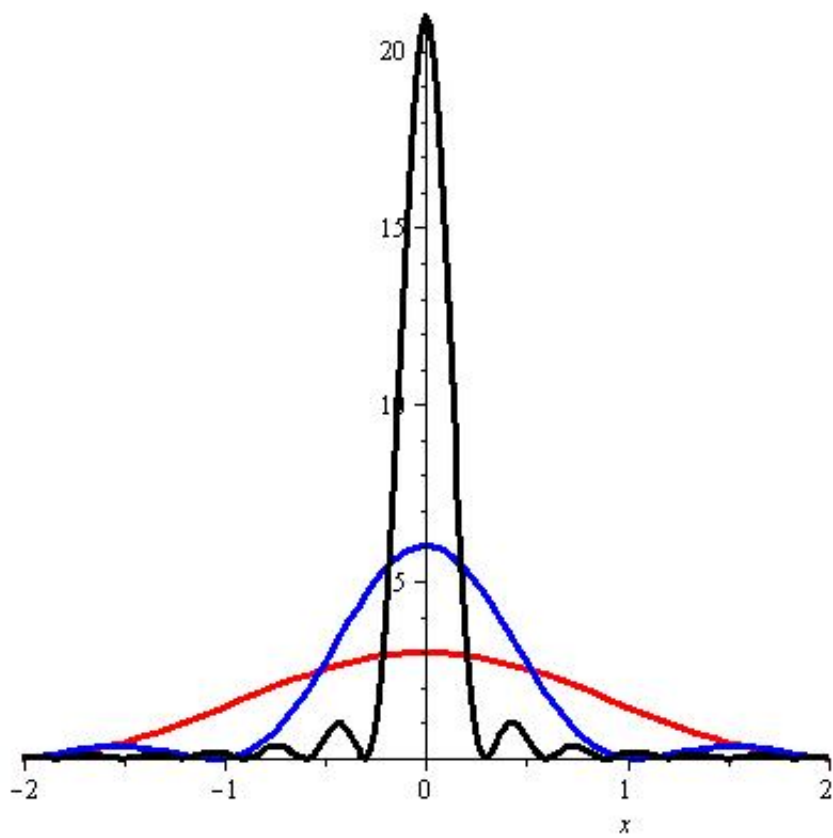


Figure 3.2: Il nucleo di Fejer con  $n = 2$  (rosso),  $n = 5$  (blu) e  $n = 20$  (nero)

**Dimostrazione** L'asserto é provato se riusciamo a far vedere che  $\sigma_n(f, x)$  é un polinomio trigonometrico. Ora dalla (18) si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_n(f, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(u) \right\} du \\ &= \frac{\widehat{f}_c(0)}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \cos(ku) du \\ &= \frac{\widehat{f}_c(0)}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \{ \widehat{f}_c(k) \cos(kx) + \widehat{f}_s(k) \sin(kx) \}\end{aligned}$$

cioé  $\sigma_n(f, \cdot)$  é un polinomio trigonometrico di grado  $n$ . L'asserto segue allora dal teorema 9.

Un'altra notevole conseguenza del teorema 9 é il seguente teorema di unicitá dello sviluppo in serie di Fourier.

**Teorema 11** *Sia  $f \in X_{2\pi}$ . Se  $\widehat{f}_c(k) = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots$  e  $\widehat{f}_s(k) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , allora  $f(x) = 0$ , quasi ovunque in  $\mathbb{R}$ .*

**Dimostrazione** Dall'ipotesi segue che  $\sigma_n(f, x) = 0$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e Per ogni  $x$ . Allora dal teorema 9 segue  $\|f\|_{X_{2\pi}} = 0$ , da cui l'asserto.

**Corollario 3** *Una funzione  $f \in X_{2\pi}$  é univocamente determinata dai coefficienti di Fourier.*

Applicando il teorema di Banach-Steinhaus (teorema 8 del Cap. 2) e il teorema di Weierstrass otteniamo il seguente importante Corollario:

**Corollario 4** *Sia  $N$  il sistema trigonometrico, cioé*

$$N = \{1/\sqrt{2\pi}, \cos(kx)/\sqrt{\pi}, \sin(kx)/\sqrt{\pi}\}.$$

*Se  $\{\chi_\rho\}$  é un nucleo tale che  $\|\chi_\rho\|_1 \leq M$  per ogni  $\rho$  e una costante assoluta  $M > 0$ , e se l'integrale singolare  $I_\rho(f, x)$  generato da  $\{\chi_\rho\}$  é tale che*

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_0} \|I_\rho(h, \cdot) - h(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0$$

*per ogni funzione  $h \in N$ , allora*

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_0} \|I_\rho(f, \cdot) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0$$

*per ogni  $f \in X_{2\pi}$ .*

**Dimostrazione.** Infatti, usando il teorema di Weierstrass, sappiamo che l'insieme dei polinomi trigonometrici é denso in  $X_{2\pi}$ . Siccome i polinomi trigonometrici sono combinazioni lineari di funzioni di  $N$  si ottiene l'asserto dal teorema di Banach-Steinhaus.

Se poi  $\{\chi_\rho\}$  é una l'identitá approssimata positiva, per studiare la convergenza in norma nello spazio  $X_{2\pi}$  basta semplicemente valutare la convergenza sulle due sole funzioni  $h_1(x) = \cos x$  e  $h_2(x) = \sin x$ . Ció é conseguenza della seguente proposizione, nella quale  $\{\chi_\rho\}$  é un generico nucleo positivo (cioé  $\chi_\rho(x) \geq 0$  quasi ovunque, per ogni  $\rho$ .)

**Proposizione 1** *Se il nucleo  $\{\chi_\rho\}$  é positivo, allora le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

(i) Per ogni  $f \in X_{2\pi}$

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_0} \|I_\rho(f, \cdot) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0,$$

(ii)

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_0} \|I_\rho(\cos, \cdot) - \cos(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow \rho_0} \|I_\rho(\sin, \cdot) - \sin(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0,$$

(iii)

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_0} I_\rho\left(\sin^2\left(\frac{u}{2}\right), 0\right) = 0,$$

(iv) Per  $\delta \in ]0, \pi[$ ,

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_0} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} \chi_\rho(u) du = 0.$$

**Dimostrazione.** Ovviamente se vale (i) vale anche (ii) perché le funzioni seno e coseno appartengono allo spazio  $X_{2\pi}$ . Supponiamo ora valida la (ii). Per la periodicitá possiamo scrivere

$$\begin{aligned} I_\rho\left(\sin^2\left(\frac{u}{2}\right), 0\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) \chi_\rho(u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\left(\frac{x-u}{2}\right) \chi_\rho(x-u) du \\ &= \frac{1}{2} \{1 - \cos x I_\rho(\cos, x) - \sin x I_\rho(\sin, x)\}. \end{aligned}$$

L'ultimo termine nella precedente relazione tende a zero nella norma dello spazio  $X_{2\pi}$ , come è immediato verificare. Pertanto siccome il primo membro è indipendente da  $x$ , sussiste (iii). Inoltre, siccome la funzione  $\chi_\rho$  è positiva, per ogni  $\delta \in ]0, \pi[$  si ha

$$I_\rho\left(\sin^2\left(\frac{u}{2}\right), 0\right) \geq \frac{\sin^2(\delta/2)}{2\pi} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} \chi_\rho(u) du$$

e quindi (iii) implica (iv). Infine, se (iv) è vera, allora  $\{\chi_\rho\}$  è una identità approssimata, e quindi vale (i).

Il teorema precedente stabilisce per una famiglia di operatori integrali di convoluzione positivi un insieme finito di funzioni “test” per la convergenza. Questo tipo di risultati vanno sotto il nome di “teoremi di Korovkin”. La proposizione precedente è una versione del teorema di Korovkin nel caso periodico.

### 3.5 Completezza del sistema trigonometrico

Sia  $N = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$  un sistema ortonormale in  $L^2(I)$ ,  $I$  un intervallo di  $\mathbb{R}$ , e sia  $f \in L^2(I)$ . La disuguaglianza di Bessel implica che la serie di Fourier di  $f$  relativa ad  $N$  converge in  $L^2(I)$ . Infatti indicate con  $\{s_n(x)\}$  le somme parziali della serie, per  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $m > n$ , si ha:

$$\|s_m - s_n\|_2^2 = \left\| \sum_{j=n+1}^m \widehat{f}_j \varphi_j \right\|_2^2 = \sum_{j=n+1}^m |\widehat{f}_j|^2,$$

e quindi l'asserto segue dalla convergenza della serie  $\sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{f}_k|^2$  e dalla completezza dello spazio  $L^2(I)$ .

Indichiamo con  $F(\cdot)$  la somma in  $L^2$  della serie di Fourier di  $f$ , cioè  $F$  verifica  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|F(\cdot) - s_n\|_2 = 0$ .

**Lemma 2** *Risulta:*

$$\langle f - F, \varphi_k \rangle = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Dimostrazione** Osserviamo intanto che per ogni funzione  $g \in L^2(I)$  si ha:

$$|\langle F, g \rangle - \langle s_n, g \rangle| = |\langle F - s_n, g \rangle| \leq \|F - s_n\|_2 \|g\|_2$$

e quindi

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k \varphi_k, g \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k \langle \varphi_k, g \rangle, \quad (3.21)$$

per ogni funzione  $g \in L^2(I)$ . Dalla (21) abbiamo allora, per ogni  $j = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$\begin{aligned} \langle f - F, \varphi_j \rangle &= \langle f, \varphi_j \rangle - \langle F, \varphi_j \rangle \\ &= \langle f, \varphi_j \rangle - \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle \\ &= \langle f, \varphi_j \rangle - \widehat{f}_j = 0, \end{aligned}$$

cioé l'asserto.

**Teorema 12** *Il sistema trigonometrico é completo in  $L^2([-\pi, \pi])$ .*

**Dimostrazione** Continuiamo, per semplicitá di scrittura, a denotare con  $\varphi_k(x)$ , le funzioni del sistema trigonometrico (1.6). Se  $F$  é la somma (in  $L^2(I)$ ) della serie di Fourier di  $f$ , il lemma 2 implica che  $\langle f - F, \varphi_j \rangle = 0$  per ogni  $j = 0, 1, 2, \dots$ ; il corollario 3 mostra allora che  $f = F$  cioé, per ogni  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  la serie di Fourier di  $f$  converge in  $L^2$  ad  $f$ . Questo prova il teorema.

In particolare, usando il teorema 12, abbiamo l'uguaglianza di Parseval:

$$\begin{aligned} \frac{(\widehat{f}_c(0))^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{[\widehat{f}_c(k)]^2 + [\widehat{f}_s(k)]^2\} & \quad (3.22) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \end{aligned}$$

per ogni  $f \in L^2([-\pi, \pi])$ .

### 3.6 $\Theta$ – fattori

Abbiamo visto che il nucleo di Dirichlet non é una identitá approssimata. Questo implica che non é possibile applicare il teorema 10 del Cap. 2. In

particolare si dimostra che in generale non c'è convergenza delle serie di Fourier in  $L^1_{2\pi}$  o in  $\mathcal{C}_{2\pi}$ .

Tuttavia possiamo ottenere la convergenza in norma considerando delle "somme generalizzate" che si ottengono moltiplicando i coefficienti  $\widehat{f}_c(k)$ ,  $\widehat{f}_s(k)$  per opportuni "fattori"  $\Theta(k)$ .

Sia  $\mathbf{A}$  un insieme di parametri i cui elementi indicheremo con  $\rho$ . Una famiglia  $\{\Theta_\rho(k)\}_{\rho \in \mathbf{A}}$  è detta un  $\Theta$ -fattore se per ogni  $\rho \in \mathbf{A}$ ,  $\Theta_\rho(k)$  è una funzione reale su  $\mathbf{Z}$  tale che:

- (i)  $\Theta_\rho \in \ell^1$ , cioè  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\Theta_\rho(k)| < +\infty$ ;
- (ii)  $\Theta_\rho(0) = 1$ ;
- (iii)  $\Theta_\rho(k) = \Theta_\rho(-k)$ .

Se  $f \in L^1_{2\pi}$  possiamo formare le  $\Theta$ -medie:

$$U_\rho(f, x) = \frac{1}{2} \widehat{f}_c(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_\rho(k) \{ \widehat{f}_c(k) \cos(kx) + \widehat{f}_s(k) \sin(kx) \}. \quad (3.23)$$

Poiché  $\Theta_\rho \in \ell^1$  e i coefficienti di Fourier sono maggiorati in valore assoluto da  $\|f\|_1$ , la serie (23) converge assolutamente ed uniformemente e così definisce una funzione  $U_\rho(f, \cdot) \in \mathcal{C}_{2\pi}$ , per ogni  $\rho \in \mathbf{A}$ .

Partendo dalla forma complessa della serie di Fourier di  $f$ , otteniamo:

$$U_\rho(f, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Theta_\rho(k) \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

Tenendo conto delle definizioni di  $\widehat{f}_c(k)$  e di  $\widehat{f}_s(k)$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} U_\rho(f, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_\rho(k) \cos(ku) \right\} du \quad (3.24) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) C_\rho(u) du \end{aligned}$$

dove  $C_\rho(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_\rho(k) \cos(kx)$ .

L'ultimo passaggio nella (24) è giustificato dal fatto che la serie converge



uniformemente. Poiché  $\Theta_\rho$  è pari,  $C_\rho(x)$  definisce un nucleo pari e continuo. L'ipotesi  $\Theta_\rho(0) = 1$  implica:

$$\int_{-\pi}^{\pi} C_\rho(u) du = 2\pi.$$

Se le  $\Theta$ -medie  $U_\rho(f, \cdot)$  convergono ad un limite per  $\rho \rightarrow \rho_0$ , in qualche senso (in norma, puntualmente etc.) e se il limite coincide con l'usuale somma della serie di Fourier nel caso che questa converga (in norma, puntualmente etc.), allora diciamo che  $\{\Theta_\rho(k)\}$  è un *fattore di convergenza* rispetto alla nozione di limite considerata.

Il  $\Theta$ -fattore definisce così un "processo di sommazione". Diciamo che la serie è  $\Theta$ -sommabile e chiameremo il limite la  $\Theta$ -somma.

Sussiste il seguente:

**Teorema 13** *Supponiamo che  $\{\Theta_\rho(k)\}$  sia un  $\Theta$ -fattore. Se il corrispondente nucleo  $C_\rho(x)$  è una identità approssimata, per ogni  $f \in X_{2\pi}$  si ha:*

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_0} \|U_\rho(f \cdot) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0 \quad (3.25)$$

*cioè la serie di Fourier di  $f$  è  $\Theta$ -sommabile in norma.*

## ESEMPI

(1) *L'integrale di Abel - Poisson*

Poniamo  $\Theta_r(k) = r^{|k|}$ ,  $\mathbf{A} = ]0, 1[$ ,  $\rho_0 = 1$ .

Poiché  $r \in ]0, 1[$ , è ovvio che  $\{\Theta_r\}$  è un  $\Theta$ -fattore. Esso è detto  *$\Theta$ -fattore di Abel - Poisson*.

In tal caso la (23) diventa:

$$\begin{aligned} P_r(f, x) &= \frac{1}{2} \widehat{f}_c(0) + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \{ \widehat{f}_c(k) \cos(kx) + \widehat{f}_s(k) \sin(kx) \} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \widehat{f}(k) e^{ikx}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Le funzioni  $P_r(f, x)$  sono le *medie di Abel - Poisson* della serie di Fourier di  $f$ . Tenendo conto della (24), otteniamo:

$$P_r(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) p_r(u) du, \quad (3.27)$$

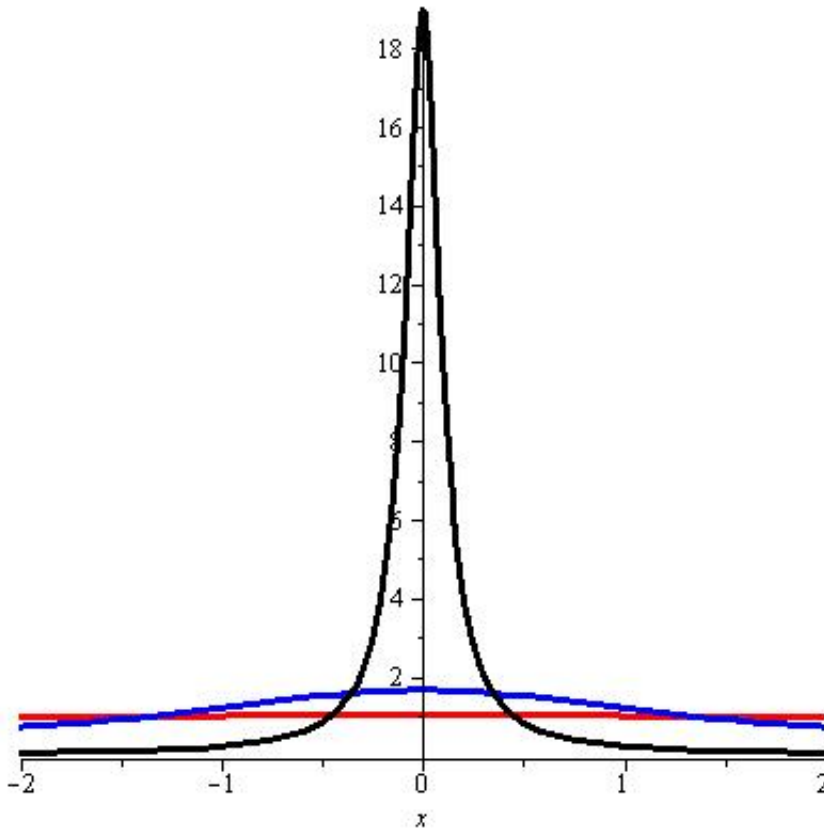


Figure 3.3: Il nucleo di Abel-Poisson con  $r = 0.01$  (rosso),  $r = 0.25$  (blu) e  $r = 0.9$  (nero)

dove, per il teorema 4, si ha:

$$p_r(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(kx) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2}.$$

La famiglia  $\{p_r\}$  é detto *nucleo di Abel - Poisson* e  $P_r(f, x)$  l'*integrale singolare di Abel - Poisson*.

Poiché  $\{p_r\}$  é pari, continuo ed é una identità approssimata, otteniamo:

**Corollario 5** *La serie di Fourier di  $f \in X_{2\pi}$  é Abel -Poisson somma-*

bile ad  $f$  nella norma di  $X_{2\pi}$ , cioè:

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \|P_r(f, \cdot) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0$$

Osserviamo qui che l'integrale singolare di Abel-Poisson  $P_r(f, x)$  può essere visto come la parte reale della funzione

$$F(z) = \hat{f}(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k) z^k, \quad (|z| < 1),$$

con  $z = re^{ix}$ . Essendo  $F$  una funzione analitica nel disco unitario  $|z| < 1$ , si ha che  $P_r(f, x)$  è una funzione armonica, cioè è soluzione dell'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

con  $x = r \cos x$ ,  $y = r \sin x$  e  $x^2 + y^2 < 1$ .

**(2)** *L'integrale singolare di Rogosinski*

Esso è definito dal  $\Theta$ -fattore:

$$\Theta_n(k) = \begin{cases} \cos(k\pi/(2n+1)), & |k| \leq n \\ 0, & |k| > n \end{cases}$$

dove  $\mathbf{A} = \mathbf{N}$ ,  $\rho_0 = +\infty$ .

L'integrale corrispondente è:

$$B_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) b_n(u) du, \quad (3.28)$$

dove

$$b_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \cos(kx).$$

Se  $\{D_n\}$  è il nucleo di Dirichlet, si dimostra facilmente che:

$$b_n(x) = \frac{1}{2} \left[ D_n\left(x + \frac{\pi}{2n+1}\right) + D_n\left(x - \frac{\pi}{2n+1}\right) \right]. \quad (3.29)$$

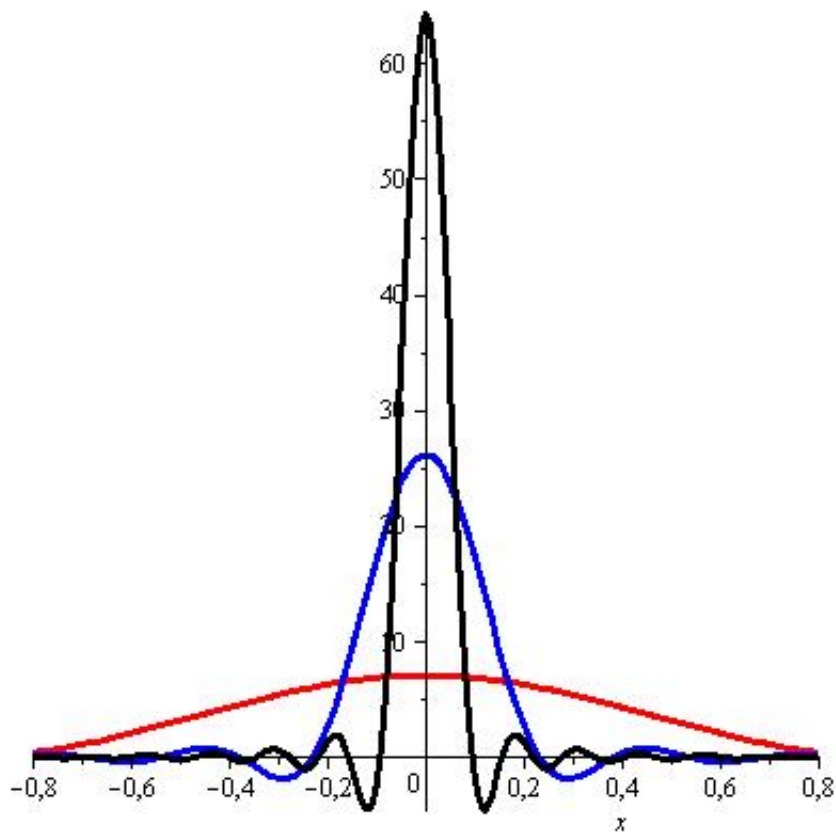


Figure 3.4: Il nucleo di Rogosinski con  $n = 5$  (rosso),  $n = 20$  (blu),  $n = 50$  (nero)

Inoltre:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |b_n(x)| dx \leq 4\pi^2. \quad (3.30)$$

Sussiste il seguente:

**Teorema 14** Per ogni  $f \in X_{2\pi}$ , l'integrale singolare di Rogosinski converge in norma ad  $f$ , per  $n \rightarrow \infty$ .

**Dimostrazione** Omessa.

(3) *Altri esempi*

Il  $\Theta$ -fattore definito dalla:

$$\Theta_n(k) = \begin{cases} 1 & |k| \leq n \\ 0 & |k| > n \end{cases}$$

con  $\mathbf{A} = \mathbb{N}$ ,  $\rho_0 = +\infty$ , dá luogo all'integrale singolare di Dirichlet, cioè a  $S_n(f, x)$ .

Il  $\Theta$ -fattore:

$$\Theta_n(k) = \begin{cases} 1 - \frac{|k|}{n+1} & |k| \leq n \\ 0 & |k| > n \end{cases}$$

con  $\mathbf{A} = \mathbb{N}$ ,  $\rho_0 = +\infty$ , dá luogo all'integrale singolare di Fejer.

Il  $\Theta$ -fattore:

$$\Theta_t(k) = e^{-k^2 t}, \quad \mathbf{A} = [t_0, +\infty[, \quad t_0 > 0, \quad \rho_0 = +\infty,$$

dá luogo al seguente integrale singolare:

$$W_t(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \vartheta_t(u) du \quad (3.31)$$

dove

$$\vartheta_t(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t} \cos(kx).$$

Questo integrale é detto *integrale singolare di Weierstrass*.

# Chapter 4

## Alcune applicazioni alle equazioni alle derivate parziali

### 4.1 L'equazione delle onde

Determiniamo la soluzione generale dell'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t, x \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Determiniamo le soluzioni  $u(x, t)$  di classe  $C^2(\mathbb{R}^2)$  della (4.1). Per fare ciò, introduciamo ora il cambiamento di variabile:

$$\xi = x + t, \quad \tau = x - t,$$

e poniamo

$$v(\xi, \tau) = u\left(\frac{\xi + \tau}{2}, \frac{\xi - \tau}{2}\right).$$

La funzione  $v$  è ancora di classe  $C^2(\mathbb{R}^2)$ , dove ora  $\mathbb{R}^2$  denota il piano  $(\xi, \tau)$ . Usando il teorema della derivazione delle funzioni composte risulta facilmente (verificarlo):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \tau} = 0. \quad (4.2)$$

Esistono allora una funzione  $g(\tau)$  di classe  $C^1(\mathbb{R})$  e una funzione  $G(\tau)$  di classe  $C^2(\mathbb{R})$  tali che

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = g(\tau), \quad \frac{\partial}{\partial \tau}(v - G) = 0.$$

Inoltre esiste una funzione  $F(\xi)$  di classe  $C^2(\mathbb{R})$  tale che

$$v(\xi, \tau) - G(\tau) = F(\xi).$$

Segue allora che

$$u(x, t) = F(x + t) + G(x - t). \quad (4.3)$$

Pertanto una soluzione dell'equazione (4.1) ha necessariamente la forma (4.3). Viceversa è facile osservare che ogni funzione della forma (4.3) con  $F, G$  di classe  $C^2(\mathbb{R})$  è soluzione della (4.1). Quindi (4.3) rappresenta di fatto l'integrale generale dell'equazione.

Consideriamo ora il seguente problema al contorno per l'equazione delle onde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

dove  $u_0, u_1$  sono due assegnate funzioni di classe  $C^2(\mathbb{R})$  e  $C^1(\mathbb{R})$  rispettivamente.

Supponiamo anzitutto che  $u(x, t)$  sia una soluzione del problema. Allora esistono funzioni  $f, g$  di classe  $C^2(\mathbb{R})$  tali che

$$u(x, t) = f(x + t) + g(x - t).$$

Sostituendo nelle condizioni al bordo, otteniamo

$$f(x) + g(x) = u_0(x), \quad f'(x) - g'(x) = u_1(x).$$

Ponendo  $c = f(0) - g(0)$ , dalla seconda ricaviamo

$$f(x) - g(x) = \int_0^x u_1(\xi) d\xi + c.$$

Pertanto si ottengono facilmente le relazioni

$$\begin{aligned} 2f(x) &= u_0(x) + \int_0^x u_1(\xi) d\xi + c \\ 2g(x) &= u_0(x) - \int_0^x u_1(\xi) d\xi - c \end{aligned}$$

e finalmente

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(\xi) d\xi. \quad (4.4)$$

Una verifica diretta mostra che la funzione (4.4) verifica le condizioni al bordo e che la soluzione è unica. Supponiamo ora che  $\varepsilon$  sia un arbitrario numero positivo e  $\varepsilon_0(x)$ ,  $\varepsilon_1(x)$  due funzioni di classe  $C^2(\mathbb{R})$  e  $C^1(\mathbb{R})$  rispettivamente, tali che  $|\varepsilon_0(x)| < \varepsilon/2$  e

$$\left| \int_0^x \varepsilon_1(\xi) d\xi \right| < \varepsilon/2$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Aggiungendo queste funzioni ai dati al bordo otteniamo un nuovo problema la cui soluzione  $v(x, t)$  verifica

$$|v(x, t) - u(x, t)| < \varepsilon$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$  e  $t > 0$ . La soluzione è allora stabile, nel senso che piccole variazioni dei dati al bordo producono piccole variazioni nella soluzione. In tal caso diremo che il problema è “ben posto”, cioè ammette soluzione unica e stabile.

La formula (4.4) è detta *Formula di d'Alembert* per l'equazione delle onde. Tale formula mostra che il valore della soluzione  $u(x, t)$  nel punto  $(x, t)$  dipende dai valori che le funzioni  $u_0$  e  $u_1$  assumono sull'intervallo  $[x-t, x+t]$ , con  $t > 0$ .

Il problema al contorno precedente ha la seguente interpretazione fisica: si consideri una corda (di lunghezza infinita). Si denoti con  $u(x, t)$  la deviazione del punto  $x$  della corda dalla sua posizione di equilibrio al tempo  $t$ . Supponiamo che la funzione  $u(x, t)$  soddisfi l'equazione (4.1). Supponiamo che al tempo  $t = 0$  il punto  $x$  abbia una deviazione pari a  $u_0(x)$  dalla posizione di equilibrio e velocità  $u_1(x)$ . Il problema permette allora di determinare la deviazione  $u(x, t)$  in  $x$  in ogni istante  $t > 0$ .

Sempre riferendoci all'equazione delle onde, utilizzeremo ora un metodo diverso dal precedente, detto *separazione delle variabili*, che consiste nel determinare soluzioni della forma  $u(x, t) = X(x)Y(t)$ .



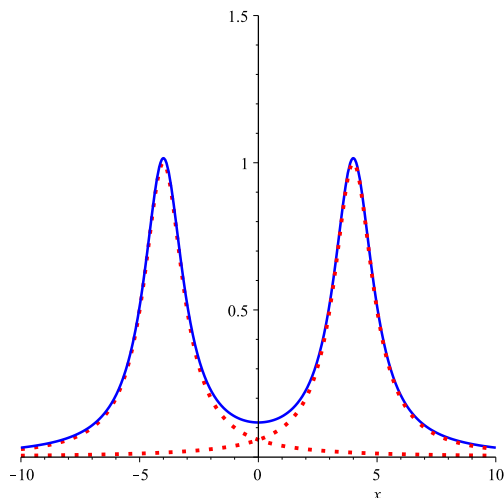


Figure 4.1: La soluzione dell'equazione delle onde

Consideriamo il seguente problema al contorno:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in ]0, \pi[, \quad t > 0, \quad (4.5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in ]0, \pi[, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in ]0, \pi[, \quad (4.7)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t > 0, \quad (4.8)$$

dove  $u_0(x)$  e  $u_1(x)$  sono date funzioni di classe  $C^2[0, \pi]$  e  $C^1[0, \pi]$  rispettivamente, tali che  $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$ ,  $u_1(0) = u_1(\pi) = 0$ .

Supponiamo che esistano una funzione  $X(x)$ ,  $x \in [0, \pi]$ , con un numero finito di zeri (i punti  $x_0, \dots, x_m$ ) e una funzione  $T(t)$ ,  $t \geq 0$  con ancora un numero finito di zeri in ogni intervallo limitato (denotiamo con  $t_0, \dots, t_n$  gli zeri che appartengono ad un intervallo limitato del semiasse  $t > 0$ ), tali che la funzione

$$v(x, t) = X(x)T(t)$$

soddisfi alle condizioni (4.5) e (4.8). Allora in particolare risulta

$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

Sia  $\Omega_{\mu\nu}$  il rettangolo limitato dalle rette  $x = x_\mu$ ,  $x = x_{\mu+1}$  e  $t = t_\nu$ ,  $t = t_{\nu+1}$ .

Allora  $v(x, t) \neq 0$  in  $\Omega_{\mu\nu}$ . Introducendo nell'equazione la funzione  $v(x, t)$  otteniamo:

$$X(x)T''(t) = X''(x)T(t),$$

e quindi esiste una costante  $\lambda$  tale che in  $\Omega_{\mu\nu}$  risulta

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda.$$

Da ciò si ottengono le due equazioni differenziali ordinarie

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{4.9}$$

$$T'' + \lambda T = 0. \tag{4.10}$$

Osserviamo ora che a due regioni  $\Omega_{\mu\nu}$  adiacenti e separate da un segmento verticale, corrisponderà la stessa costante  $\lambda$  perchè il rapporto  $T''(t)/T(t)$  assume la stessa costante nelle due regioni. Lo stesso accade per due regioni adiacenti e separate da un segmento orizzontale, (si consideri il rapporto  $X''(x)/X(x)$ ). Perciò le equazioni (4.9) e (4.10) sono entrambe valide su tutta la regione  $]0, \pi[ \times \mathbb{R}^+$ . Usando allora la condizione  $X(0) = X(\pi) = 0$  si vede facilmente che esiste un intero  $n$  tale che  $\lambda = n^2$  e  $X(x) = A_n \sin nx$ . Inoltre dalla (4.10) otteniamo

$$T(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

dove  $a_n$  e  $b_n$  sono costanti non entrambe nulle. Conglobando allora le costanti  $A_n$  con  $a_n$  e  $b_n$  otteniamo l'espressione:

$$v(x, t) = (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \sin nx. \tag{4.11}$$

È facile verificare che la (4.11) verifica le (4.5) e (4.8). Inoltre per linearità anche ogni funzione della forma

$$w(x, t) = \sum_{\nu=1}^n (a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t) \sin \nu x,$$

verifica l'equazione (4.5) e la (4.8). Per determinare allora le soluzioni che verificano anche le restanti condizioni (4.6) e (4.7), consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \sin nx.$$

Mostriamo ora che se  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  sono i coefficienti di Fourier relativi agli sviluppi in serie di soli seni

$$u_0(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad u_1(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \sin nx,$$

la serie rappresenta allora l'unica soluzione del problema. In tal caso infatti, la serie verifica le condizioni (4.6), (4.7) e (4.8).

A tale scopo denotiamo con  $\tilde{u}_0(x)$  l'estensione  $2\pi$ -periodica dispari della funzione  $u_0(x)$ ,  $x \in [0, \pi]$ . Definiamo analogamente  $\tilde{u}_1(x)$ . Utilizzando allora i risultati sulle serie di Fourier (Capitolo 1), risulta per ogni  $x \in \mathbb{R}$

$$\tilde{u}_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \tilde{u}_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \sin nx. \quad (4.12)$$

Le due funzioni in (4.12) sono rispettivamente di classe  $C^2(\mathbb{R})$  e  $C^1(\mathbb{R})$ , pertanto utilizzando la formula di d'Alembert, per le funzioni  $\tilde{u}_0$  e  $\tilde{u}_1$  risulta, integrando termine a termine

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= \frac{1}{2}[\tilde{u}_0(x+t) + \tilde{u}_0(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{u}_1(\xi) d\xi \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin n(x+t) + \sin n(x-t)}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\cos n(x+t) - \cos n(x-t)}{2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \sin nx. \end{aligned}$$

Quindi la funzione definita dalla serie:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \sin nx$$

è la soluzione richiesta.

È possibile anche dimostrare che il problema al contorno ora studiato è ben posto secondo la definizione precedente (vedi Sez. 4.1).

Il problema trattato ha la seguente interpretazione fisica. Supponiamo che una corda uniforme abbia i suoi estremi fissati nei punti 0 e  $\pi$  dell'asse  $x$  e che le sue vibrazioni soddisfino l'equazione delle onde (4.1). Supponiamo

inoltre che la posizione e la velocità iniziali (al tempo  $t = 0$ ) siano date, per ogni punto  $x$  della corda, dalle funzioni  $u_0, u_1$ . Supponendo che non ci sia attrito agli estremi, il problema al contorno precedente descrive in ogni istante il moto della corda, cioè misura la deviazione della corda dalla posizione di riposo in ogni suo punto.

## 4.2 L'equazione del calore

In questa sezione studiamo un problema al contorno relativo all'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (4.13)$$

Per provare teoremi di unicità delle soluzioni di problemi al contorno per l'equazione del calore, è spesso utile il seguente *principio di massimo*:

**Teorema 1** *Sia  $\Omega$  il rettangolo aperto  $]a, b[ \times ]0, T[$  del piano  $(x, t)$ . Denotiamo con  $\partial\Omega$ , la frontiera di  $\Omega$  e con  $\bar{\Omega}$  la sua chiusura. Sia  $S$  la parte di  $\partial\Omega$  situata sui lati  $t = 0$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ . Sia  $S' = \partial\Omega \setminus S$ . Supponiamo che  $u(x, t)$  sia una funzione continua, con dominio  $\bar{\Omega}$  e che  $u(x, t)$  soddisfi all'equazione del calore  $u'_t = u''_{xx}$  sull'insieme  $\Omega \cup S'$ . Allora  $u(x, t)$  assume il suo massimo e il suo minimo su  $S$ .*

La dimostrazione è omessa.

Utilizzando ancora il metodo della separazione delle variabili, determiniamo la soluzione del seguente problema al contorno:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in [0, \pi], \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & 0 < x < \pi \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & t > 0, \end{aligned}$$

dove la funzione  $u_0(x)$  appartiene alla classe  $C^2[0, \pi]$  e soddisfa alle condizioni:

$$u_0(0) = u_0(\pi) = 0.$$

Supporremo a priori che la soluzione  $u(x, t)$  sia continua sull'insieme  $[0, \pi] \times \mathbb{R}_0^+$ .

Utilizzando la separazione delle variabili, ragionando come per l'equazione delle onde, cerchiamo soluzioni della forma

$$v(x, t) = X(x)T(t), \quad X(0) = X(\pi) = 0.$$

Si perviene alle equazioni ordinarie

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T' + \lambda T = 0,$$

dove per  $\lambda$  si trovano i valori  $\lambda = n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pertanto si ottengono le funzioni

$$X(x) = a_n \sin nx, \quad T(t) = b_n e^{-n^2 t},$$

dove  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  sono successioni di coefficienti. Conglobando questi coefficienti, otteniamo una famiglia di funzioni del tipo

$$v(x, t) = A_n e^{-n^2 t} \sin nx.$$

Per ottenere la soluzione del problema al contorno, si determinano i coefficienti  $\{A_n\}$  in modo che valga lo sviluppo di Fourier

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx,$$

ottenendo la soluzione

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \sin nx.$$

Si può ora mostrare che quella ottenuta è realmente una soluzione (per verifica diretta) e che essa è unica. Per l'unicità infatti, supponiamo che il suddetto problema abbia due soluzioni e denotiamo con  $U(x, t)$  la loro differenza. Allora  $U$  è ancora soluzione del problema, ad eccezione del fatto che ora si ha  $U(x, 0) = 0$ , per  $x \in ]0, \pi[$ . Il principio di massimo applicato alla funzione  $U$  mostra che deve necessariamente essere  $U(x, t) = 0$  per ogni  $(x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}_0^+$ . Quindi la soluzione è unica.

Infine può essere mostrato che la soluzione è stabile e quindi il suddetto problema è ben posto.

### 4.3 L'equazione di Laplace

L'equazione di Laplace è un'equazione ellittica del secondo ordine della forma

$$\Delta u(x, y) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (4.14)$$

Iniziamo subito la trattazione dei problemi al contorno legati all'equazione di Laplace con il seguente *principio di massimo*:

**Teorema 2** *Sia  $\Omega$  una regione limitata del piano  $(x, y)$  con frontiera  $\partial\Omega$  e sia  $\bar{\Omega}$  la sua chiusura. Sia  $u(x, y)$  una funzione continua definita su  $\bar{\Omega}$ , soluzione dell'equazione di Laplace (4.14) in  $\Omega$ . Allora  $u(x, y)$  assume il suo massimo e il suo minimo su  $\partial\Omega$ .*

**Dimostrazione.** Il massimo e il minimo assoluti della funzione  $u$  sulla frontiera di  $\Omega$  esistono per il teorema di Weierstrass, essendo la frontiera di  $\Omega$  un compatto. E' intanto ovvio che se una funzione  $u \in C^2(\Omega)$  verifica la condizione  $\Delta u > 0$  per ogni  $(x, y) \in \Omega$ , allora evidentemente il valore massimo non può essere assunto in un punto interno perché, essendo in tal caso il differenziale secondo una forma quadratica semidefinita negativa, in quel punto si avrebbe necessariamente  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0$  e  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leq 0$ . Ora, considerata la (4.14), dato  $\varepsilon > 0$ , definiamo la funzione ausiliaria

$$v_\varepsilon(x, y) = u(x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2), \quad (x, y) \in \Omega.$$

Allora  $\Delta v_\varepsilon(x, y) = \Delta u(x, y) + 4\varepsilon = 4\varepsilon > 0$  e quindi per quanto detto sopra  $v_\varepsilon(x, y)$  assume massimo assoluto in un punto  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial\Omega$ . Si ha, per ogni  $(x, y) \in \bar{\Omega}$ :

$$v_\varepsilon(x, y) \leq \max\{v_\varepsilon(x, y) : (x, y) \in \partial\Omega\} \leq M + \varepsilon R^2,$$

dove  $M = \max_{\partial\Omega} u(x, y)$  e  $R$  è il raggio di una circonferenza che contiene  $\bar{\Omega}$ . Ciò implica che

$$u(x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2) \leq M + \varepsilon R^2$$

e passando al limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , si ottiene  $u(x, y) \leq M$ , cioè l'asserto. Per il minimo assoluto si procede in modo analogo, considerando prima il caso  $\Delta u < 0$  e poi considerando la funzione ausiliaria  $v_\varepsilon(x, y) = u(x, y) - \varepsilon(x^2 + y^2)$ .

Sia  $\Omega$  una regione limitata del piano  $(x, y)$  con frontiera  $\partial\Omega$ . Il *problema di Dirichlet* per  $\Omega$  è un problema al contorno del tipo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (4.15)$$

$$u(x, y) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (4.16)$$

dove  $u_0$  è una data funzione con dominio  $\partial\Omega$ .

Il problema di Dirichlet ha numerose interpretazioni fisiche. Ad esempio, esso costituisce un modello matematico per risolvere il seguente problema: trovare la temperatura in ogni punto di una lamina uniforme  $\Omega$  quando è nota la temperatura in ogni punto del suo bordo, assumendo che la temperatura sia stazionaria (non varia cioè nel tempo).

A titolo di esempio determiniamo la soluzione del seguente problema di Dirichlet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x^2 + y^2 < 1 \quad (4.17)$$

$$u(\cos\theta, \sin\theta) = f(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (4.18)$$

dove  $f$  è una funzione data di classe  $C^2(\mathbb{R})$ , periodica e di periodo  $2\pi$ .

Supporremo a priori che la soluzione  $u$  sia una funzione continua nel disco unitario chiuso. Utilizzeremo il metodo della separazione delle variabili, dopo aver fatto un cambiamento di variabili.

Scrivendo l'equazione (4.15) in coordinate polari  $r, \theta$  otteniamo per il teorema di derivazione delle funzioni composte:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 0 < r < 1, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (4.19)$$

$$u(1, \theta) = f(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (4.20)$$

$$u(0, \theta) \text{ è costante per } \theta \in \mathbb{R} \quad (4.21)$$

$$u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta), \quad 0 < r < 1, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (4.22)$$

Cerchiamo soluzioni del problema del tipo

$$v(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

Procedendo come al solito otteniamo le due equazioni ordinarie

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0, \quad r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0.$$

Per la prima, in corrispondenza ai valori di  $\lambda = n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , otteniamo le soluzioni:

$$\Theta(\theta) = \frac{a_0}{2}, \quad n = 0; \quad \Theta(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta, \quad n > 0,$$

dove  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  sono coefficienti reali. Per la seconda equazione si ha:

$$\begin{aligned} R &= c_1 + c_2 \log r, \quad \text{con } c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad \text{se } n = 0, \\ R &= c_1 r^n + c_2 r^{-n}, \quad \text{con } c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad \text{se } n > 0. \end{aligned}$$

Così si ottengono soluzioni della forma

$$\begin{aligned} v(r, \theta) &= \frac{a_0}{2}, \quad \text{se } n = 0 \\ v(r, \theta) &= r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad \text{se } n > 0 \end{aligned}$$

Per selezionare la soluzione che verifica il dato al bordo, si determinano i coefficienti  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  in modo che valga lo sviluppo di Fourier

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

ottenendo infine la soluzione

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

Si verifica ora, direttamente, che  $u(r, \theta)$  è effettivamente una soluzione del problema di Dirichlet.

Supponiamo che ci siano due soluzioni e sia  $U(x, t)$  la loro differenza. Allora  $U$  è ancora soluzione del problema di Dirichlet, salvo che la condizione al bordo è ora data da  $U(\cos \theta, \sin \theta) = 0$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ . Allora per il principio di massimo per l'equazione di Laplace si ha necessariamente  $U = 0$ , da cui segue l'unicità.

È possibile mostrare infine che il problema di Dirichlet è ben posto.



# Chapter 5

## La trasformata di Fourier

### 5.1 L'integrale di Fourier

In questo paragrafo ci occuperemo della rappresentazione di funzioni sommabili definite su  $\mathbb{R}$ . Se una tale  $f$  non é periodica, non possiamo esprimerla come la somma di una serie trigonometrica, perché tale somma é chiaramente periodica. Tuttavia sostituendo la serie con un opportuno integrale possiamo ottenere una rappresentazione *non discreta* di  $f$ .

**Teorema 1** (Fourier) *Se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  e se  $x_o \in \mathbb{R}$  é tale che sia verificata la condizione di Dini (corollario 1, Cap.3) per qualche  $\delta > 0$ , si ha:*

$$f(x_o) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\lambda(t - x_o)) dt \quad (5.1)$$

**Dimostrazione** Sia  $r > 0$  e poniamo:

$$I(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^r d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\lambda(t - x_o)) dt.$$

Dato che  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $I(r)$  esiste come integrale di Lebesgue. Pertanto applicando il teorema di Fubini e ponendo  $v = t - x_o$  otteniamo:

$$I(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_o + v) \frac{\sin(rv)}{v} dv.$$

Dato che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(rv)}{v} dv = \pi,$$

per ogni  $r > 0$ , ragionando come nel teorema 5, Cap.3, si ha:

$$I(r) - f(x_o) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(x_o + v) - 2f(x_o) + f(x_o - v)}{v} \sin(rv) dv.$$

Sia  $\delta > 0$  un numero fissato. Scriviamo:

$$\begin{aligned} I(r) - f(x_o) &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^\delta + \int_\delta^{+\infty} \right\} \frac{f(x_o + v) - 2f(x_o) + f(x_o - v)}{v} \sin(rv) dv \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Dalla condizione di Dini e dal lemma di Riemann-Lebesgue,  $J_1 \rightarrow 0$ , per  $r \rightarrow +\infty$ . Inoltre:

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{\pi} \int_\delta^{+\infty} \frac{f(x_o + v) + f(x_o - v)}{v} \sin(rv) dv - \frac{2}{\pi} f(x_o) \int_\delta^{+\infty} \frac{\sin(rv)}{v} dv \\ &= J_2^1 + J_2^2. \end{aligned}$$

Ancora per il lemma di Riemann-Lebesgue  $J_2^1 \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow +\infty$ . Dato che  $\sin(v)/v$  é integrabile in senso generalizzato in  $[0, +\infty[$ , operando nell'ultimo integrale il cambiamento di variabile  $rv = t$  é facile vedere che  $J_2^2$  tende a 0 per  $r \rightarrow +\infty$ . Da questo segue l'asserto.

OSSERVAZIONE Si osservi che l'integrale esterno nella (1) é un integrale generalizzato, cioè:

$$\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\lambda(t - x_o)) dt = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\lambda(t - x_o)) dt.$$

In generale la funzione

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\lambda(t - x_o)) dt$$

non é assolutamente integrabile.

Il teorema seguente fornisce delle condizioni alternative per la rappresentazione integrale di una funzione sommabile.

**Teorema 2 (Jordan)** Se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  e se  $x_o$  é tale che  $f$  é a variazione limitata in  $[x_o - \delta, x_o + \delta]$ , per qualche  $\delta > 0$ , si ha:

$$\frac{1}{2}\{f(x_o + 0) + f(x_o - 0)\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\lambda(t - x_o)) dt. \quad (5.2)$$

Omettiamo la dimostrazione. Osserviamo soltanto che se, oltre alle ipotesi,  $f$  é continua in  $x_o$ , allora il primo membro di (2) diventa  $f(x_o)$ .

In analogia con quanto accade nella teoria delle serie di Fourier, é facile mostrare che se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  verifica l'ipotesi del teorema 1 in  $x_o$  ed é pari, si ha:

$$f(x_o) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(\lambda x_o) \left\{ \int_0^{+\infty} f(t) \cos(\lambda t) dt \right\} d\lambda$$

mentre se é dispari,

$$f(x_o) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin(\lambda x_o) \left\{ \int_0^{+\infty} f(t) \sin(\lambda t) dt \right\} d\lambda$$

Lasciamo al lettore la prova delle relazioni precedenti.

ESEMPIO Calcolare, al variare di  $x \in \mathbb{R}$ , l'integrale:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda \cos(\lambda x)}{\lambda} d\lambda.$$

**Soluzione** Basta porre  $f(t) = 1$ ,  $|t| < 1$ ;  $f(t) = 0$ ,  $|t| \geq 1$ . In tal caso  $f$  é pari e verifica le ipotesi del teorema 2, per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda \cos(\lambda x)}{\lambda} d\lambda &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(\lambda x) \left\{ \int_0^{+\infty} f(t) \cos(\lambda t) dt \right\} d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \{f(x + 0) - f(x - 0)\} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \\ 1/2 & \text{se } |x| = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Il teorema seguente fornisce una versione complessa del teorema 1.

**Teorema 3** Se  $f$  e  $x_o$  verificano le ipotesi del teorema 1, si ha:

$$f(x_o) = \frac{1}{2\pi} (P.V.) \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda(t-x_o)} dt \right\} d\lambda, \quad (5.3)$$

dove  $(P.V.) \int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N$  é il valore principale.

Omettiamo la dimostrazione.

Analogamente si ottiene la forma complessa del teorema 2.

## 5.2 La trasformata di Fourier. Prime proprietà

La definizione della trasformata di Fourier é contenuta nella formula (3), insieme con la trasformazione inversa. Posto:

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad f \in L^1(\mathbb{R}), \quad (5.4)$$

in ogni punto  $x_o$  nel quale é verificata l'ipotesi di Dini, si ha dalla (3):

$$f(x_o) = \frac{1}{2\pi} (P.V.) \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x_o} d\lambda. \quad (5.5)$$

La (4) associa ad una  $f \in L^1(\mathbb{R})$  una nuova funzione  $g$  che si chiama la *trasformata di Fourier* di  $f$ , mentre la (5) esprime la  $f$  stessa in termini della sua trasformata  $g$  e può essere considerata quindi l'operazione inversa.

Per ottenere una maggiore simmetria formale tra (4) e (5), noi definiamo la trasformata di Fourier come l'operatore  $\hat{\cdot}$  definito in  $L^1(\mathbb{R})$  dalla:

$$\hat{\cdot}: f \mapsto \hat{f},$$

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (5.6)$$

L'antitrasformata di Fourier é invece la trasformazione inversa:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (P.V.) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad (5.7)$$

in ogni punto  $x$  ove sussista il teorema di Fourier.

Si osservi che la somiglianza tra le formule (6) e (7) é solo formale. Mentre la (6) é ben definita in  $L^1(\mathbb{R})$  la (7) non é sempre definita e sotto le ipotesi del teorema 3, esiste come "valore principale".

Cominciamo con lo stabilire alcune semplici conseguenze della definizione di  $\widehat{\cdot}$ .

**Proposizione 1** Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Sussistono le seguenti proprietà:

(i) Posto  $(\tau_h f)(t) = f(t+h)$ ,  $h \in \mathbb{R}$ , si ha:

$$\widehat{\tau_h f}(\lambda) = e^{ih\lambda} \widehat{f}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(ii) Posto  $F(t) = e^{-iht} f(t)$ ,  $h \in \mathbb{R}$  si ha:

$$\widehat{F}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda+h), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(iii) Posto  $G(t) = \delta f(\delta t)$ ,  $\delta > 0$ , si ha:

$$\widehat{G}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda/\delta), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(iv)  $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$  e  $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ .

(v) La trasformata di Fourier é lineare cioé :

$$\widehat{\alpha f + \beta g}(\lambda) = \alpha \widehat{f}(\lambda) + \beta \widehat{g}(\lambda),$$

con  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ .

**Dimostrazione** Le (i)-(iii) e (v) sono immediate conseguenze della definizione e sono pertanto lasciate al lettore. La (iv) segue subito dalla:

$$|\widehat{f}(\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| |e^{-i\lambda t}| dt = \|f\|_1, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

e quindi l'asserto.

La (iv) e la (v) e il teorema che segue, implicano che " $\widehat{\cdot}$ " é una trasformazione lineare limitata di  $L^1(\mathbb{R})$  in  $C_o$ , dove

$$C_o = \{g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : g \text{ é continua e } \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} g(\lambda) = 0\}.$$

**Teorema 4** Se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  allora  $\widehat{f} \in C_0$ .

**Dimostrazione** Per ogni  $h, \lambda \in \mathbb{R}$  si ha:

$$|\widehat{f}(\lambda + h) - \widehat{f}(\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| |e^{-iht} - 1| dt.$$

Sia ora  $\{h_n\}$  una successione qualsiasi tale che  $h_n \rightarrow 0$ . Posto

$$g_n(t) = |f(t)| |e^{-ihn t} - 1|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R},$$

si ha  $g_n(t) \rightarrow 0$  quasi ovunque per  $n \rightarrow +\infty$ , ed inoltre,  $|g_n(t)| \leq 2|f(t)|$ . Essendo  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , utilizzando il teorema di convergenza dominata di Lebesgue, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\widehat{f}(\lambda + h_n) - \widehat{f}(\lambda)| = 0,$$

da cui segue la continuità di  $\widehat{f}$ , per l'arbitrarietà della successione  $\{h_n\}$ .

Proviamo ora che  $|\widehat{f}(\lambda)| \rightarrow 0$  per  $|\lambda| \rightarrow +\infty$ . Questo é una estensione del lemma di Riemann-Lebesgue. Si ha:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt. \end{aligned}$$

Posto, nell'ultimo integrale,  $t = u + \pi/\lambda$ ,  $\lambda \neq 0$ , si ha:

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \{f(t) - f(t + \pi/\lambda)\} e^{-i\lambda t} dt$$

e quindi

$$|\widehat{f}(\lambda)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - f(t + \pi/\lambda)| dt, \quad \lambda \neq 0.$$

Se  $|\lambda| \rightarrow +\infty$ , allora  $\pi/\lambda$  tende a 0 e quindi l'asserto segue dal teorema 2 del Capitolo 2.

ESEMPI (a) Sia  $f(t) = e^{-\gamma|t|}$ ,  $\gamma > 0$ . Si ha:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|t|} e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\gamma t} \cos(\lambda t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\gamma}{\lambda^2 + \gamma^2}.\end{aligned}$$

(b) Sia

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$

con  $a > 0$ . Si ha:

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-i\lambda t} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\lambda a)}{\lambda}.$$

Osserviamo che in tal caso  $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$ .

(c) Sia  $f(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}$ ,  $a > 0$ .

In tal caso utilizzando la teoria delle funzioni di variabile complessa, si ha:

$$\widehat{f}(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} e^{-a|\lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(d) Sia  $f(t) = e^{-at^2}$ ,  $a > 0$ .

In tal caso, si ottiene:

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-at^2} \cos(\lambda t) dt.$$

Derivando sotto il segno di integrale, si ottiene l'equazione differenziale:

$$\frac{d}{d\lambda} \widehat{f}(\lambda) = -\frac{\lambda}{2a} \widehat{f}(\lambda),$$

ed inoltre é facile verificare che  $\widehat{f}(0) = 1/\sqrt{2a}$ ; pertanto  $\widehat{f}$  é l'unica soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + (t/2a)y = 0 \\ y(0) = 1/\sqrt{2a}, \end{cases}$$

Da questo segue che

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\lambda^2/4a}.$$

### 5.3 Proprietá fondamentali della trasformata di Fourier in $\mathbb{R}$

In questo paragrafo trattiamo delle principali proprietá della trasformata di Fourier in  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 5** Sia  $\{f_n\}_n$  una successione di funzioni in  $L^1(\mathbb{R})$  convergente in  $L^1(\mathbb{R})$  ad una funzione  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Allora:

$$\|\widehat{f}_n - \widehat{f}\|_\infty \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

**Dimostrazione** É conseguenza immediata della linearitá della trasformata di Fourier e della (iv) Proposizione 1.

**Teorema 6** Sia  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$  e  $f' \in L^1(\mathbb{R})$ . Allora:

$$\widehat{f}'(\lambda) = i\lambda \widehat{f}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (5.8)$$

(Cioé la trasformata di Fourier trasforma la derivazione nel prodotto per  $i\lambda$ ).

**Dimostrazione** Dall'ipotesi, possiamo scrivere:

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(v)dv, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dato che  $f' \in L^1(\mathbb{R})$ , si ha  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ .

Integrando per parti,

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \widehat{f}'(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-i\lambda t} dt \\ &= i\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \\ &= \sqrt{2\pi} (i\lambda) \widehat{f}(\lambda). \end{aligned}$$



OSSERVAZIONI (a) In generale se  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^k(\mathbb{R})$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ , e se  $f^{(j)} \in L^1(\mathbb{R})$ , per ogni  $j = 1, \dots, k$ , si ha :

$$\widehat{f^{(k)}}(\lambda) = (i\lambda)^k \widehat{f}(\lambda). \quad (5.9)$$

(b) Il teorema 6 sussiste anche se  $f$  é assolutamente continua, con  $f' \in L^1(\mathbb{R})$ .

**Corollario 1** Se  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^k(\mathbb{R})$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , e se  $f^{(j)} \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $j = 1, \dots, k$ , si ha:

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} |\lambda|^k |\widehat{f}(\lambda)| = 0. \quad (5.10)$$

**Dimostrazione** Dalla (9), e dal fatto che  $\widehat{f^{(k)}}(\lambda) \rightarrow 0$ ,  $|\lambda| \rightarrow +\infty$ , segue l'asserto.

In particolare se  $f \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  e  $f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$ , si ottiene  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ .

La formula (5.9) e i risultati conseguenti sussistono anche nel caso piú generale in cui la funzione  $f \in L^1(\mathbb{R})$  appartiene allo spazio  $AC_{loc}^{(k-1)}$  delle funzioni  $(k-1)$ -volte localmente assolutamente continue e tali che  $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ . Questo implica in particolare che esiste una funzione  $g \in L^1(\mathbb{R})$  tale che

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \int_0^x du_1 \left[ a_1 + \int_0^{u_1} \left[ a_2 + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^{u_{k-2}} du_{k-1} \left[ a_{k-1} + \int_0^{u_{k-1}} g(u_k) du_k \right] \dots \right] \right]. \end{aligned}$$

Il Corollario 1 mette in luce che quante piú derivate ha la  $f$ , tanto piú rapidamente  $\widehat{f}$  tende a 0, per  $|\lambda| \rightarrow +\infty$ . Vale anche un "viceversa":

**Teorema 7** Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ; se la funzione  $g$  definita dalla  $g(t) = tf(t)$  é in  $L^1(\mathbb{R})$ ,  $\widehat{f}$  é derivabile e risulta:

$$\frac{d}{d\lambda} \widehat{f}(\lambda) = -i\widehat{g}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (5.11)$$

**Dimostrazione** Derivando sotto il segno di integrale, si ha:

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt = -i \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-i\lambda t} dt,$$

da cui segue l'asserto.

In generale, se  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , posto  $g_k(t) = t^k f(t)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ , se  $g_j \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $j = 1, \dots, k$ , si ha che  $\widehat{f}$  é derivabile  $k$ -volte ed inoltre:

$$\widehat{f^{(k)}}(\lambda) = \widehat{-i^k g_k}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il teorema seguente, del quale non riportiamo la dimostrazione, mostra che la trasformata di Fourier é iniettiva.

**Teorema 8** Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Se  $\widehat{f}(\lambda) = 0$ , per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ , si ha  $f(t) = 0$  quasi ovunque in  $\mathbb{R}$ .

In particolare, se  $\widehat{f}(\lambda) = \widehat{g}(\lambda)$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ , si ha  $f = g$  in  $L^1(\mathbb{R})$ .

**Teorema 9** (Formula di Parseval). Se  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda)g(\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\lambda)f(\lambda)d\lambda \quad (5.12)$$

**Dimostrazione** É una conseguenza del teorema di Fubini: si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda)g(\lambda)d\lambda &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt \right\} d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\widehat{g}(t)dt. \end{aligned}$$

Siano  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  e sia  $f \star g$ , il loro prodotto di convoluzione in  $\mathbb{R}$ . Sussiste il seguente importante:

**Teorema 10** (Teorema di Convoluzione) Per  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , si ha:

$$\widehat{f \star g}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (5.13)$$

**Dimostrazione** La dimostrazione é analoga a quella del teorema 6, Cap.2.

## 5.4 Inversione

Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Se  $f$  verifica la condizione di Dini per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , il teorema integrale di Fourier (teorema 3), fornisce una formula di inversione del tipo:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad x \in \mathbb{R},$$

dove l'integrale é inteso nel senso del valore principale. Tuttavia é spesso utilizzato il seguente teorema, del quale non daremo la dimostrazione.

**Teorema 11** *Se  $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , si ha:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad q.o.x \in \mathbb{R}, \quad (5.14)$$

dove l'integrale é inteso nel senso di Lebesgue. Inoltre se  $f$  é continua la (14) vale ovunque in  $\mathbb{R}$ .

**Corollario 2** *Siano  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ . Se  $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ , si ha:*

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda) \widehat{g}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad (5.15)$$

quasi ovunque in  $\mathbb{R}$ .

**Dimostrazione** Per il teorema 10 si ha  $\widehat{f \star g} = \widehat{f} \widehat{g}$ , ed esiste una costante  $M > 0$  tale che  $\|\widehat{f}\|_\infty \leq M$ . Pertanto risulta:

$$\|\widehat{f \star g}\|_1 = \|\widehat{f} \widehat{g}\|_1 \leq M \|\widehat{g}\|_1.$$

L'asserto segue dal teorema 11.

Come abbiamo visto, la trasformata di Fourier di una funzione  $f \in L^1(\mathbb{R})$  non é necessariamente integrabile secondo Lebesgue in  $\mathbb{R}$ . Pertanto la formula di inversione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda,$$

deve essere interpretata in modo opportuno. Se  $\widehat{f}$  é integrabile secondo Lebesgue, allora l'integrale nella formula di inversione é ben definito come integrale di Lebesgue. Il problema dell'inversione é in qualche modo analogo

a quello della convergenza della serie di Fourier di una funzione  $f \in L^1_{2\pi}$ , che può essere considerata come una formula di inversione: si ricostruisce la funzione  $f$  a partire dai suoi coefficienti di Fourier. Nella teoria della trasformata si ricostruisce la funzione  $f$  attraverso la sua trasformata. Quando la funzione  $\hat{f}$  non è integrabile, si ricorre alla nozione di “teta-fattore” sulla retta reale. Qui non svilupperemo la teoria generale dei tetra-fattori in  $\mathbb{R}$  che formalmente è analoga al caso periodico. Ci limiteremo ad introdurre la definizione, qualche esempio fondamentale e il teorema di convergenza negli spazi  $X(\mathbb{R})$  e in senso puntuale.

Una funzione pari  $\Theta \in L^1(\mathbb{R})$  si chiama un “teta-fattore” in  $\mathbb{R}$ , se  $\hat{\Theta} \in L^1(\mathbb{R})$  ed inoltre

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Theta}(\lambda) d\lambda = 1.$$

Osserviamo che se  $\Theta$  è pari, allora anche  $\hat{\Theta}$  lo è.

Se  $\Theta$  è una funzione continua, parleremo di “Teta-fattore continuo”. Importanti esempi di Teta-fattori sono i seguenti:

(i) Teta-fattore di Cesaro (o di Fejer):

$$\Theta_1(x) = (1 - |x|)\chi_{[-1,1]}(x),$$

dove  $\chi_I$  è la funzione caratteristica dell'insieme  $I$ .

(ii) Teta-fattore di Abel:

$$\Theta_2(x) = e^{-|x|}.$$

(iii) Teta-fattore di Gauss-Weierstrass

$$\Theta_3(x) = e^{-x^2}.$$

Se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  e  $\Theta$  è un fissato Teta-fattore, definiamo le  $\Theta$ -medie dell'integrale nella formula di inversione, ponendo

$$U_\rho(f, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta\left(\frac{\lambda}{\rho}\right) \hat{f}(\lambda) e^{ix\lambda} d\lambda,$$

per ogni  $\rho > 0$ . Sussiste il seguente:

**Teorema 12** Se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  e  $\Theta$  é un fissato Teta-fattore, l'integrale  $U_\rho(f, x)$  esiste per tutti gli  $x \in \mathbb{R}$ , appartiene ad  $L^1(\mathbb{R})$  come funzione di  $x$ , e soddisfa le proprietá

- $\|U_\rho(f, \cdot)\|_1 \leq \|\widehat{\Theta}\|_1 \|f\|_1$ ,
- L'integrale nella formula di inversione é  $\Theta$ -sommabile ad  $f$ , cioè si ha:

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \|U_\rho(f, \cdot) - f(\cdot)\|_1 = 0.$$

**Dimostrazione.** Utilizzando le proprietá della trasformata di Fourier (in particolare la (i) della proposizione 1) possiamo scrivere

$$U_\rho(f, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta\left(\frac{u}{\rho}\right) \widehat{\tau_x f}(u) du.$$

Applicando la (5.12) e tenendo conto che risulta:

$$\widehat{\Theta\left(\frac{\cdot}{\rho}\right)}(u) = \rho \widehat{\Theta}(\rho u),$$

si ha:

$$U_\rho(f, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \widehat{\Theta}(\rho u) f(x+u) du.$$

Ora se  $\Theta$  é pari, lo é anche  $\widehat{\Theta}$  e quindi cambiando  $u$  con  $-u$  si ha infine la rappresentazione

$$U_\rho(f, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u) \rho \widehat{\Theta}(\rho u) du.$$

Da questo segue subito la prima delle due proprietá.

Per quanto riguarda la convergenza, osserviamo anzitutto che la famiglia  $\{\chi_\rho\}_\rho$  definite per  $\rho > 0$  da

$$\chi_\rho(u) = \rho \widehat{\Theta}(\rho u) \quad (u \in \mathbb{R}, \rho > 0)$$

é una identitá approssimata in  $\mathbb{R}$ , cioè

$$\|\rho \widehat{\Theta}(\rho \cdot)\|_1 \leq M$$

per una costante assoluta  $M > 0$ , ed inoltre

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{|u| \geq \delta} \rho \widehat{\Theta}(\rho u) du = 0,$$

per ogni  $\delta > 0$ . La prova é semplice ed é lasciata al lettore. La costante  $M$  può essere presa uguale a  $\|\widehat{\Theta}\|_1$ .

Utilizzando il teorema di Fubini-Tonelli, si ha

$$\begin{aligned} \|U_\rho(f, \cdot) - f(\cdot)\|_1 &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho |\widehat{\Theta}(\rho u)| |f(x-u) - f(x)| du \right\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho |\widehat{\Theta}(\rho u)| \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-u) - f(x)| dx \right\} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho |\widehat{\Theta}(\rho u)| \|f(\cdot - u) - f(\cdot)\|_1 du. \end{aligned}$$

Ora, dalla continuità in norma dell'operatore di traslazione (Teorema 2 del Cap. 2), fissato un  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $\|f(\cdot - u) - f(\cdot)\|_1 < \varepsilon$  per  $|u| < \delta$ . Dunque,

$$\begin{aligned} \|U_\rho(f, \cdot) - f(\cdot)\|_1 &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{|u| < \delta} + \int_{|u| \geq \delta} \right\} \rho |\widehat{\Theta}(\rho u)| \|f(\cdot - u) - f(\cdot)\|_1 du \\ &\leq \varepsilon \|\widehat{\Theta}\|_1 + 2\|f\|_1 \int_{|u| \geq \delta} \rho |\widehat{\Theta}(\rho u)| du, \end{aligned}$$

che tende a 0 per  $\rho \rightarrow +\infty$ .

Quanto alla convergenza puntuale, sussiste il seguente teorema:

**Teorema 13** *Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Se  $\Theta$  é un Teta-fattore tale che  $\widehat{\Theta}$  é positivo e decrescente in  $\mathbb{R}^+$ , allora l'integrale inverso di Fourier é  $\Theta$ -sommabile quasi ovunque ad  $f$ , cioè:*

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta\left(\frac{\lambda}{\rho}\right) \widehat{f}(\lambda) e^{ix\lambda} d\lambda = f(x) \quad \text{q.o. } x \in \mathbb{R}.$$

**Dimostrazione.** Proponiamo la dimostrazione soltanto nel caso particolare in cui la funzione  $f$  é uniformemente continua e limitata in  $\mathbb{R}$ . In tal caso

proveremo la convergenza uniforme in  $\mathbb{R}$  e non é necessario assumere condizioni di monotonia e di positività sulla funzione  $\widehat{\Theta}$ . Fissato un  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$|f(x - u) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}, |u| < \delta.$$

Pertanto si ha:

$$\begin{aligned} |U_\rho(f, x) - f(x)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{|u| < \delta} + \int_{|u| \geq \delta} \right\} |f(x - u) - f(x)| \rho \widehat{\Theta}(\rho u) du \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Per  $I_1$  si ha subito

$$I_1 \leq \|\widehat{\Theta}\|_1 \varepsilon,$$

mentre per  $I_2$  abbiamo:

$$I_2 \leq 2\|f\|_\infty \int_{|u| \geq \delta} \rho |\widehat{\Theta}(\rho u)| du,$$

e l'ultimo integrale tende a 0 per  $\rho \rightarrow +\infty$ . Da questo segue la convergenza uniforme.

La dimostrazione del caso generale utilizza tutte le condizioni assunte sulla funzione  $\widehat{\Theta}$  ed é piú delicata perché coinvolge la nozione di "punto di Lebesgue" di una funzione e metodi di integrazione alla Lebesgue-Stiltjes.

Come casi particolari, otteniamo le seguenti formule di inversione, che coinvolgono i Teta-fattori di Cesaro, Abel e Gauss-Weierstrass:

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{-\rho}^{\rho} \left(1 - \frac{|\lambda|}{\rho}\right) \widehat{f}(\lambda) e^{ix\lambda} d\lambda = f(x) \quad q.o.$$

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{|\lambda|}{\rho}\right) \widehat{f}(\lambda) e^{ix\lambda} d\lambda = f(x) \quad q.o.$$

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{\rho^2}\right) \widehat{f}(\lambda) e^{ix\lambda} d\lambda = f(x) \quad q.o.$$

## 5.5 La formula di sommazione di Poisson

La formula di Poisson stabilisce una importante relazione tra la trasformata di Fourier di una funzione  $f$  e quella finita. Sussiste il seguente teorema:

**Teorema 14** *Se  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , allora la serie*

$$g(x) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x + 2\pi k)$$

*converge assolutamente q.o. in  $\mathbb{R}$  e  $g \in L^1_{2\pi}$ . Inoltre, per i coefficienti di Fourier di  $g$  si ha:*

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(k), \quad k \in \mathbf{Z},$$

*dove  $F(k)$  é il valore in  $k$  della trasformata di Fourier di  $f$ .*

**Dimostrazione.** Intanto osserviamo subito che la funzione  $g$  definita dalla serie é periodica di periodo  $2\pi$ . Proviamo ora la convergenza della serie. Si ha anzitutto:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x + 2\pi k)| dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} |f(x + 2k\pi)| dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} |f(t)| dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-(2n+1)\pi}^{(2n+1)\pi} |f(t)| dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty. \end{aligned}$$

Pertanto, usando il teorema di convergenza monotona, si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(x + 2k\pi)| \right] dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x + 2k\pi)| dx < +\infty.$$

Da questo si deduce che la serie é assolutamente convergente e che  $g \in L^1_{2\pi}$ . Consideriamo ora (formalmente) la serie di Fourier di  $g$

$$g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(k) e^{ikx},$$



dove

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u) e^{-iku} du, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ora sostituendo formalmente l'espressione della funzione  $g$  in termini di serie si ha, procedendo come prima,

$$\begin{aligned} \widehat{g}(k) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(u + 2j\pi) e^{-iku} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-(2n+1)\pi}^{(2n+1)\pi} f(u) e^{-iku} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(k). \end{aligned}$$

Il teorema precedente implica la seguente “formula di sommazione di Poisson”:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x + 2k\pi) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx}.$$

Si noti che il simbolo  $\sim$  implica soltanto che la serie a destra della precedente relazione é la serie di Fourier della funzione  $g$  a sinistra. Se la serie di Fourier di  $g$  é effettivamente convergente alla funzione  $g$ , allora possiamo scrivere l'uguaglianza al posto di  $\sim$ . In particolare, se la serie che definisce la funzione  $g$  é uniformemente convergente e se la trasformata finita di Fourier di  $g$  é in  $\ell^1$ , cioè  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(k)| < +\infty$ , allora si ha effettivamente

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x + 2k\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx},$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

La formula di Poisson é una delle formule basilari dell'Analisi di Fourier. Essa ha molte applicazioni. Qui illustriamo brevemente una formula di quadratura.

Sia  $f$  una funzione a banda limitata in  $[-1, 1]$  cioè, continuando a denotare con  $F$  la trasformata di Fourier di  $f$ , si ha  $F(v) = 0$  per  $|v| \geq 1$ . Allora  $F(k) = 0$  per ogni  $k \neq 0$  e pertanto la formula di Poisson si scrive

$$F(0) = \sqrt{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x + 2k\pi),$$

da cui si ricava

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x + 2k\pi),$$

che é una formula esatta di quadratura (Gaussiana).

## 5.6 Alcune applicazioni alle equazioni differenziali alle derivate parziali

In questa sezione illustriamo alcuni metodi risolutivi per l'equazione di Laplace e per il problema del calore che fanno uso della trasformata di Fourier.

I) *Il Problema di Dirichlet per il semipiano*

Il problema consiste nel determinare la distribuzione di temperatura su una lamina bidimensionale infinita, assimilabile ad un semipiano, nota la temperatura lungo il bordo. Se  $u(x, y)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , rappresenta la temperatura nel punto  $(x, y)$ , e se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é la distribuzione nota di temperatura sull'asse  $x$ , il problema consiste nel determinare la soluzione dell'equazione:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  con una condizione iniziale del tipo  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Il metodo che seguiremo fará uso della trasformata di Fourier in  $\mathbb{R}$  (questo dipende dalla forma del dominio di  $u(x, y)$ ).

Supporremo  $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  con  $u(\cdot, y)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot, y)$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cdot, y)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}(\cdot, y)$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\cdot, y)$  in  $L^1(\mathbb{R})$ , ed inoltre:

(+)  $\|u(\cdot, y)\|_1 \leq M$ , per ogni  $y \in \mathbb{R}^+$ , per qualche  $M > 0$ .

(++) Esistono funzioni  $g, h \in L^1(\mathbb{R})$  tali che:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right| \leq g(x), \quad \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \right| \leq h(x),$$

per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ .

Infine, interpreteremo il dato al bordo, supponendo  $f \in L^1(\mathbb{R})$  e :

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \|u(\cdot, y) - f(\cdot)\|_1 = 0. \quad (5.16)$$

Applichiamo ora la trasformata di Fourier alla funzione  $u(\cdot, y)$  come funzione di  $x$ . Usando il fatto che  $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^1(\mathbb{R})$  rispetto ad  $x$ , otteniamo:

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(\lambda, y) = -\lambda^2 \widehat{u}(\lambda, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad y > 0. \quad (5.17)$$

Inoltre dalle  $(++)$ , usando un teorema di derivazione sotto il segno di integrale, si ha:

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}(\lambda, y) = \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial y^2}(\lambda, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad y > 0. \quad (5.18)$$

L'equazione  $\Delta u = 0$  diventa allora:

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial y^2}(\lambda, y) - \lambda^2 \widehat{u}(\lambda, y) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad y > 0. \quad (5.19)$$

La (19) é una equazione differenziale ordinaria, dipendente dal parametro  $\lambda$ , la cui funzione incognita é  $z(y) = \widehat{u}(\lambda, y)$ . L'equazione é lineare del secondo ordine a coefficienti costanti (rispetto ad  $y$ ). La soluzione generale é allora:

$$\widehat{u}(\lambda, y) = \begin{cases} A(\lambda)e^{\lambda y} + B(\lambda)e^{-\lambda y} & \lambda \neq 0 \\ A(0) + B(0)y & \lambda = 0, \end{cases}$$

dove  $A(\lambda), B(\lambda)$  sono coefficienti (dipendenti dal parametro  $\lambda$ ). Occorre ora determinare  $A(\lambda), B(\lambda)$ .

Dalla  $(+)$ ,  $|\widehat{u}(\lambda, y)| \leq M$ , per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+$  e quindi per  $y \rightarrow +\infty, A(\lambda) = 0$ , se  $\lambda > 0, B(\lambda) = 0$ , se  $\lambda \leq 0$ .

Inoltre la (16) si trasforma nella (teorema 5):

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \|\widehat{u}(\lambda, y) - \widehat{f}(\lambda)\|_\infty = 0.$$

Ciò implica che  $A(\lambda) + B(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)$ , per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ ; pertanto se  $u(x, y)$  é una soluzione del problema, la sua trasformata di Fourier é data da:

$$\widehat{u}(\lambda, y) = \widehat{f}(\lambda)e^{-|\lambda|y}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad y > 0. \quad (5.20)$$

Poiché  $\widehat{u}(\cdot, y) \in L^1(\mathbb{R})$ , usando il teorema 11, otteniamo:

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y|\lambda|} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Adoperando il risultato dell'esempio c) del paragrafo 2, ed il corollario 2, otteniamo infine:

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-s)}{y^2 + s^2} ds. \quad (5.21)$$

Il procedimento seguito implica che se una soluzione esiste, essa ha la forma (21). Occorre ora verificare che (21) è effettivamente soluzione dell'equazione  $\Delta u = 0$ , con il dato  $f$  stabilito. La verifica è tecnicamente intricata, ma non difficile. L'integrale nella (21) si chiama *integrale singolare di Poisson-Cauchy*.

## II) L'equazione del calore

In questa sezione studieremo un problema al contorno per l'equazione del calore utilizzando la trasformata di Fourier. Data quindi l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (5.22)$$

determiniamo la soluzione del problema al contorno, con il dato iniziale:

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.23)$$

con  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Supporremo inoltre che la soluzione  $u(x, t)$  sia una funzione continua e limitata, (cioè cercheremo soluzioni che soddisfano queste proprietà). Qui  $f(x)$  è un'assegnata funzione continua e limitata in  $\mathbb{R}$ . La condizione al bordo sarà interpretata come in precedenza, cioè

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|u(\cdot, t) - f(\cdot)\|_1 = 0.$$

L'utilizzo della trasformata di Fourier implica alcune condizioni ulteriori da imporre alla funzione  $u$ . Assumeremo che  $u(\cdot, t)$ ,  $u'_x(\cdot, t)$ ,  $u''_{xx}(\cdot, t)$  e  $u'_t(\cdot, t)$  siano funzioni in  $L^1(\mathbb{R})$  per ogni  $t > 0$ .

Come nell'esempio precedente, per poter applicare teoremi di derivazione sotto il segno di integrale, assumeremo l'esistenza di una funzione  $g \in L^1(\mathbb{R})$  tale che

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t} u(x, t) \right| \leq g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Supponiamo allora che  $u(x, t)$  sia una soluzione di classe  $C^2$  del problema al contorno. Consideriamo la trasformata di Fourier  $\hat{u}(\lambda, t)$  rispetto alla

variabile  $x \in \mathbb{R}$ , per ogni  $t > 0$ . Si osservi che, dalle ipotesi, tale trasformata è ben definita. Si ha:

$$\widehat{u}(\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\lambda x} dx,$$

ed utilizzando un teorema di derivazione sotto il segno di integrale si ha:

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\lambda, t) = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(x, t),$$

mentre, come nell'esempio precedente,

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial x^2}(\lambda, t) = -\lambda^2 \widehat{u}(\lambda, t).$$

Per la condizione al bordo assunta, risulta  $\widehat{u}(\lambda, t) \rightarrow \widehat{f}(\lambda)$  per  $t \rightarrow 0^+$ , uniformemente rispetto a  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Allora otteniamo il problema di Cauchy (per equazioni ordinarie):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(\lambda, t) + \lambda^2 \widehat{u}(\lambda, t) &= 0 \\ \widehat{u}(\lambda, 0) = \widehat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx. \end{aligned}$$

Questo problema ha soluzione

$$\widehat{u}(\lambda, t) = \widehat{f}(\lambda) e^{-\lambda^2 t}.$$

Usiamo ora l'esempio (d) del paragrafo 5.2:

$$h(x) = e^{-ax^2} \implies \widehat{h}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\lambda^2/(4a)}.$$

Posto allora  $a = 1/(4t)$  si ottiene

$$\widehat{h}(\lambda) = \sqrt{2t} e^{-\lambda^2 t}.$$

Usando allora il teorema di convoluzione e la formula di inversione si ha:

$$u = f * \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-(\cdot)^2/4t},$$

cioè

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-(x-y)^2/(4t)} dy. \quad (5.24)$$

La (24) rappresenta la forma finale della soluzione del problema. Pertanto se una soluzione esiste essa deve avere la forma (24). Anche in tal caso, occorre verificare che (24) è effettivamente una soluzione. Questo si può fare per verifica diretta. Inoltre la funzione trovata è di classe  $C^2$  ed è limitata in tutto l'insieme  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . L'integrale (24) si chiama "integrale di Gauss-Weierstrass" e la funzione

$$K_t(x) := \frac{1}{\sqrt{2t}} \exp(-x^2/(4t)) \quad (t > 0)$$

si chiama "nucleo di Gauss-Weierstrass" o "nucleo del calore".

## 5.7 Applicazioni alle equazioni integrali di Fredholm

Consideriamo qui un'equazione integrale di Fredholm (di seconda specie) di *tipo convolutivo*, cioè un'equazione del tipo:

$$\varphi(t) = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-s) \varphi(s) ds + f(t) \quad (5.25)$$

dove  $\mu$  è una costante complessa,  $f$  è una funzione nota e  $\varphi$  è la funzione incognita. Supponiamo che  $K, \varphi, f \in L^1(\mathbb{R})$ . Procedendo per ora formalmente, applichiamo ad ambo i membri della (25) la trasformata di Fourier. Usando il teorema di convoluzione otteniamo:

$$\widehat{\varphi}(\lambda) = \mu \sqrt{2\pi} \widehat{K}(\lambda) \widehat{\varphi}(\lambda) + \widehat{f}(\lambda). \quad (5.26)$$

Dalla (26) ricaviamo:

$$\widehat{\varphi}(\lambda) = \frac{\widehat{f}(\lambda)}{1 - \mu \sqrt{2\pi} \widehat{K}(\lambda)}, \quad \text{se } 1 - \mu \sqrt{2\pi} \widehat{K}(\lambda) \neq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Allora la soluzione può essere formalmente scritta usando la formula di inversione:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{f}(\lambda)}{1 - \mu \sqrt{2\pi} \widehat{K}(\lambda)} e^{i\lambda t} d\lambda. \quad (5.27)$$

Ciò ha un senso se per esempio la funzione  $\widehat{f}(\lambda) [1 - \mu\sqrt{2\pi}\widehat{K}(\lambda)]^{-1} \in L^1(\mathbb{R})$ . In tal caso la (27) è la soluzione in  $L^1(\mathbb{R})$  dell'equazione (25).

In generale se per qualche  $\lambda \in \mathbb{R}$  risulta  $1 - \mu\sqrt{2\pi}\widehat{K}(\lambda) = 0$ , l'equazione (25) non possiede soluzioni in  $L^1(\mathbb{R})$ .

Una equazione di Fredholm analoga alla precedente, è la seguente (equazione di prima specie):

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t-s)\varphi(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.28)$$

Supponendo che  $K, f, \varphi$  siano funzioni in  $L^1(\mathbb{R})$ , procedendo come prima, passando alla trasformata di Fourier otteniamo:

$$\widehat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\widehat{f}(\lambda)}{\widehat{K}(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

se  $\widehat{K}(\lambda) \neq 0$ . Se infine  $\widehat{f}/\widehat{K}$  è una funzione in  $L^1(\mathbb{R})$ , si ha

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{f}(\lambda)}{\widehat{K}(\lambda)} e^{i\lambda t} d\lambda,$$

che è la soluzione cercata. Facciamo ora un esempio. Consideriamo l'equazione

$$\varphi(t) = \mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-s|} \varphi(s) ds + f(t),$$

dove  $\mu < 1/2$  è una fissata costante ed  $f$  è una qualunque funzione in  $L^1(\mathbb{R})$ . Ricordando che la trasformata di Fourier della funzione  $K(t) = e^{-|t|}$  è data da  $\sqrt{2/\pi}/(1 + \lambda^2)$ , otteniamo

$$\widehat{\varphi}(\lambda) = \frac{2\mu}{1 + \lambda^2} \widehat{\varphi}(\lambda) + \widehat{f}(\lambda),$$

da cui

$$\widehat{\varphi}(\lambda) = \frac{\widehat{f}(\lambda)}{1 - \frac{2\mu}{1+\lambda^2}} = \frac{(1 + \lambda^2)\widehat{f}(\lambda)}{1 + \lambda^2 - 2\mu}.$$

Ora, essendo  $\mu < 1/2$  si ha che il denominatore nella precedente frazione non si annulla mai. Se  $\widehat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R})$ , allora si ha la soluzione

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 + \lambda^2)\widehat{f}(\lambda)}{1 + \lambda^2 - 2\mu} e^{i\lambda t} d\lambda.$$

Ad esempio, se  $f(t) = e^{-|t|}$ , otteniamo

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{1 + \lambda^2 - 2\mu} d\lambda.$$

Utilizzando ora una integrazione in campo complesso, si ottiene

$$\varphi(t) = \frac{\exp(-\sqrt{1-2\mu}|x|)}{\sqrt{1-2\mu}}.$$

Facciamo ancora un altro esempio. Determiniamo la soluzione dell'equazione integrale (di prima specie)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-y) \exp(-y^2/2) dy = \exp(-t^2/4), \quad (t \in \mathbb{R}),$$

con  $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ . Utilizzando la trasformata di Fourier, il teorema di convoluzione e l'esempio (d) della sezione 5.2, si ha

$$\sqrt{2\pi} \widehat{\varphi}(v) \exp(-v^2/2) = \sqrt{2} \exp(-v^2),$$

da cui

$$\widehat{\varphi}(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-v^2/2)$$

ed infine

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-t^2/2).$$



## Chapter 6

# La trasformata di Fourier in $L^p$ , $1 < p \leq 2$

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto la trasformata di Fourier per funzioni in  $L^1(\mathbb{R})$ . Abbiamo visto che l'operatore  $\widehat{\cdot}$  porta funzioni dallo spazio  $L^1(\mathbb{R})$  allo spazio delle funzioni continue che tendono a zero all'infinito (sottospazio di  $L^\infty(\mathbb{R})$ ). Se  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $p \neq 1$  l'integrale che definisce  $\widehat{f}$  non é in generale ben definito come integrale di Lebesgue (lo studente é invitato a fornire semplici esempi). Pertanto occorrerá modificare la definizione di trasformata di Fourier in modo "consistente", cioè in modo che la nuova definizione riproduca esattamente quella dello spazio  $L^1(\mathbb{R})$  quando  $p = 1$ . Ciò verrà fatto nel caso  $1 < p \leq 2$ . Un approccio generale, che comprende anche il caso  $p > 2$  verrà poi brevemente descritto nel seguito, facendo uso della teoria delle distribuzioni. Il programma é il seguente: prima definiamo la trasformata in  $L^2(\mathbb{R})$  con l'ausilio del Teorema di Hahn-Banach e successivamente, utilizzando un teorema di interpolazione (Riesz-Thorin) estendiamo la definizione agli spazi  $L^p$ , con  $1 < p < 2$ .

### 6.1 Risultati preliminari

In questa sezione riportiamo gli enunciati di due teoremi fondamentali di Analisi Funzionale: il Teorema di Hahn-Banach e il teorema di interpolazione di Riesz-Thorin. Per approfondimenti si può consultare un qualunque testo di Analisi Funzionale.

**Teorema 1** (*Hahn-Banach*) *Sia  $X$  uno spazio di Banach e sia  $A \subset X$  un*

sottospazio lineare denso in  $X$ . Supponiamo che  $T_0$  sia un operatore lineare limitato di  $A$  in uno spazio di Banach  $Y$  e denotiamo con  $\|T_0\|_{A,Y}$  la norma dell'operatore. Allora l'operatore  $T_0$  può essere esteso univocamente ad un operatore lineare limitato  $T : X \rightarrow Y$  tale che  $Tf = T_0f$  per ogni  $f \in A$  ed inoltre  $\|T\|_{X,Y} = \|T_0\|_{A,Y}$ .

Il secondo risultato è il teorema di interpolazione di Riesz-Thorin. Occorre qui introdurre alcune definizioni preliminari. Se  $(R, \mu)$  è un generico spazio di misura, diciamo che una funzione  $f$  definita su  $R$  è semplice se essa assume un numero finito di valori (su sottoinsiemi misurabili) e ha supporto compatto.

Siano  $(R_1, \mu_1)$  e  $(R_2, \mu_2)$  due spazi di misura con misure  $\mu_1$  e  $\mu_2$ . Sia  $T_0$  un operatore lineare definito sullo spazio  $S_1$  delle funzioni semplici  $f$  su  $R_1$  e a valori nell'insieme delle funzioni  $\mu_2$ -misurabili su  $R_2$ . Diciamo che  $T_0$  è di "tipo forte" (in inglese strong-type)  $(1/p, 1/q)$ , con  $0 \leq p, q \leq 1$  (qui si pone  $1/p = \infty$  se  $p = 0$ ), se esiste una costante  $M > 0$  tale che

$$\|T_0f\|_{1/q} \leq M\|f\|_{1/p}, \quad f \in S_1.$$

Siamo pronti ora per enunciare il teorema di Riesz-Thorin:

**Teorema 2** (*Riesz-Thorin convexity theorem*) Se  $T_0$  è simultaneamente di tipo forte  $(1/p_1, 1/q_1)$  e  $(1/p_2, 1/q_2)$  con  $(p_1, q_1), (p_2, q_2) \in [0, 1] \times [0, 1]$ , con costanti  $M_1$  e  $M_2$  rispettivamente, allora  $T_0$  è anche di tipo forte  $(1/p, 1/q)$  con costante  $M_1^{1-t}M_2^t$  per tutti i valori  $p = (1-t)p_1 + tp_2$  e  $q = (1-t)q_1 + tq_2$  con  $t \in ]0, 1[$ , cioè

$$\|T_0f\|_{1/q} \leq M_1^{1-t}M_2^t\|f\|_{1/p}, \quad f \in S_1.$$

## 6.2 La trasformata di Fourier in $L^p(\mathbb{R})$ , $1 < p \leq 2$

### 6.2.1 Il caso $p = 2$

In questa sezione studieremo il caso  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Ricordiamo che lo spazio  $L^2(\mathbb{R})$  è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx \quad (f, g \in L^2(\mathbb{R})).$$

Tale prodotto scalare verifica le analoghe proprietà viste nel Capitolo 1. In particolare, si ha

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}.$$

Cominciamo col discutere il caso in cui  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Sussiste il seguente:

**Teorema 3** *Se  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  allora  $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$  e risulta*

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2. \quad (6.1)$$

**Dimostrazione.** Poniamo  $\widetilde{f}(x) := \overline{f(-x)}$ , q.o.  $x \in \mathbb{R}$ . Si ha  $\widetilde{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Consideriamo la funzione  $h$  definita dalla convoluzione

$$h(x) = (f * \widetilde{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\widetilde{f}(u)du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Per il teorema 3 del Capitolo 2, la funzione  $h$  è continua ed appartiene ad  $L^1(\mathbb{R})$ . Inoltre si ha  $h(0) = \|f\|_2^2$ . Per il teorema 13 del Capitolo 5, utilizzando il tetra-fattore di Abel, si ha anche

$$h(x) = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-|v|}{\rho}\right) \widehat{h}(v) e^{ivx} dv,$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$  (si ricordi che  $h$  è continua). Essendo, per il teorema di convoluzione,

$$\widehat{h}(v) = \widehat{f}(v)\widehat{\widetilde{f}}(v)$$

ed inoltre

$$\begin{aligned} \widehat{\widetilde{f}}(v) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{f}(x) e^{-ivx} dx = \langle \widetilde{f}, e^{iv(\cdot)} \rangle \\ &= \overline{\langle e^{iv(\cdot)}, \widetilde{f} \rangle} = \overline{\widehat{f}(v)}, \end{aligned}$$

si ha infine  $\widehat{h}(v) = |\widehat{f}(v)|^2$ , per ogni  $v \in \mathbb{R}$ . Dunque, utilizzando il teorema di convergenza monotona (Beppo-Levi) si ha:

$$h(0) = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-|v|}{\rho}\right) \widehat{h}(v) dv = \|\widehat{f}\|_2^2,$$

ciò l'asserto.

Se  $f \in L^2(\mathbb{R})$  per ogni  $\rho > 0$  definiamo la funzione  $f_\rho(x)$  ponendo:

$$f_\rho(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leq \rho \\ 0, & |x| > \rho. \end{cases} \quad (6.2)$$

Si ha la seguente proposizione:

**Proposizione 1** *Si ha  $f_\rho \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  per ogni  $\rho > 0$ . Inoltre  $\widehat{f}_\rho$  converge in  $L^2(\mathbb{R})$  ad una funzione in  $L^2(\mathbb{R})$  per  $\rho \rightarrow +\infty$ .*

**Dimostrazione.** Il fatto che  $f_\rho \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  é una conseguenza immediata della disuguaglianza di Hölder. Pertanto dal Teorema 3 si ha anche che  $\widehat{f}_\rho \in L^2(\mathbb{R})$ . Usando la linearitá della trasformata di Fourier si ha, con  $\rho_1 < \rho_2$

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}_{\rho_1} - \widehat{f}_{\rho_2}\|_2^2 &= \|f_{\rho_1} - f_{\rho_2}\|_2^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\rho_2}^{-\rho_1} |f(u)|^2 du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\rho_1}^{\rho_2} |f(u)|^2 du. \end{aligned}$$

Siccome  $f \in L^2(\mathbb{R})$  utilizzando l'assoluta continuitá dell'integrale di Lebesgue, la somma al secondo membro della precedente relazione tende a 0 e quindi

$$\lim_{\rho_1, \rho_2 \rightarrow +\infty} \|\widehat{f}_{\rho_1} - \widehat{f}_{\rho_2}\|_2 = 0.$$

Per la completezza di  $L^2(\mathbb{R})$  esiste un'unica funzione, denotata  $F^2[f] \in L^2(\mathbb{R})$  tale che

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \|F^2[f] - \widehat{f}_\rho\|_2 = 0.$$

La proposizione é cosí provata.

Siamo ora pronti per la definizione della trasformata di Fourier in  $L^2(\mathbb{R})$ .

Per ogni funzione  $f \in L^2(\mathbb{R})$  definiamo la trasformata di Fourier di  $f$  la funzione (univocamente determinata)  $F^2[f] \in L^2(\mathbb{R})$  data dalla

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\| F^2[f](\cdot) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\rho}^{\rho} f(u) e^{-i(\cdot)u} du \right\|_2 = 0.$$

Una prima differenza notevole con il caso della trasformata di Fourier in  $L^1(\mathbb{R})$  é che nel caso  $L^2(\mathbb{R})$  la trasformata é definita soltanto quasi ovunque, come elemento dello spazio  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Teorema 4** *La trasformata di Fourier  $F^2[\cdot]$  definisce una trasformazione lineare limitata di  $L^2(\mathbb{R})$  in  $L^2(\mathbb{R})$  che preserva le norme, cioè per ogni  $f \in L^2(\mathbb{R})$  si ha (equazione di Parseval):*

$$\|F^2[f]\|_2 = \|f\|_2. \quad (6.3)$$

**Dimostrazione.** Siccome  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \|F^2[f] - \widehat{f}_\rho\|_2 = 0$  segue subito che  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \|\widehat{f}_\rho\|_2 = \|F^2[f]\|_2$ . D'altra parte si ha anche  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \|f_\rho\|_2 = \|f\|_2$  e quindi l'asserto segue dal Teorema 3.

Il teorema precedente mette in luce che la trasformata di Fourier  $F[f]$  definisce un isomorfismo dello spazio di Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$  in sé stesso.

### 6.2.2 Il caso $1 < p < 2$

Avendo definito la trasformata di Fourier per funzioni in  $L^1(\mathbb{R})$  e in  $L^2(\mathbb{R})$  utilizzando ora il Teorema di Riesz-Thorin possiamo definire la trasformata nel caso  $1 < p < 2$ . Indichiamo con  $S_0$  lo spazio delle funzioni semplici definite su  $\mathbb{R}$ . Siccome tali funzioni appartengono allo spazio  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , possiamo associare ad ogni funzione  $h \in S_0$  la trasformata di Fourier in  $L^1$ . Sussiste la seguente Proposizione

**Proposizione 2** *Sia  $1 \leq p \leq 2$ . Se  $h \in S_0$  allora  $\widehat{h} \in L^{p'}(\mathbb{R})$  ed inoltre*

$$\|\widehat{h}\|_{p'} \leq \|h\|_p, \quad (6.4)$$

dove  $p'$  indica l'esponente coniugato di  $p$ .

**Dimostrazione.** Applichiamo il Teorema 2 con  $R_1 = R_2 = \mathbb{R}$  e  $\mu_1 = \mu_2 =$  misura di Lebesgue. Sia  $T_0$  la trasformazione che assegna ad ogni funzione semplice  $h \in S_0$  la sua trasformata di Fourier  $\widehat{h}$  cioè

$$(T_0 h)(v) = \widehat{h}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) e^{-ivu} du \quad (h \in S_0).$$

Per la Proposizione 1 (iv) del Capitolo 5 e il Teorema 3 si ha pertanto

$$\|T_0 h\|_\infty \leq \|h\|_1 \quad \text{e} \quad \|T_0 h\|_2 = \|h\|_2.$$

Quindi  $T_0$  é di tipo forte  $(1, \infty)$  e  $(2, 2)$  su  $S_0$  con costanti  $M_1 = M_2 = 1$  e applicando il Teorema di Riesz-Thorin otteniamo che  $T_0$  é anche di tipo forte  $(p, p')$  con  $1 < p < 2$ .

Ora siccome é noto che lo spazio  $S_0$  é denso in ogni spazio  $L^p(\mathbb{R})$  applicando il Teorema 1 (Hahn-Banach) otteniamo

**Proposizione 3** *L'operatore  $T_0$  sopra definito su  $S_0$  può essere esteso univocamente ad un operatore lineare limitato  $T$  di  $L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p \leq 2$ , in  $L^{p'}(\mathbb{R})$  tale che*

$$\|Tf\|_{p'} \leq \|f\|_p, \quad (6.5)$$

per ogni  $f \in L^p(\mathbb{R})$ .

Quindi ad ogni funzione  $f \in L^p(\mathbb{R})$  possiamo associare la funzione univocamente determinata  $Tf \in L^{p'}(\mathbb{R})$  per cui é verificata la (6.5) e che coincide con  $T_0h = \widehat{h}$  su  $S_0$ . Sussiste la seguente proposizione.

**Proposizione 4** *Sia  $f \in L^p(\mathbb{R})$ , con  $1 < p < 2$  e sia  $f_\rho$  la funzione definita in (6.2). Si ha*

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \|Tf - \widehat{f}_\rho\|_{p'} = 0 \quad (6.6)$$

dove, come al solito,  $p'$  é l'esponente coniugato di  $p$ .

**Dimostrazione.** Dalla disuguaglianza di Hölder si ha che  $f_\rho \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$  e quindi  $\widehat{f}_\rho$  é ben definita dalla (5.6). Inoltre

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \|f - f_\rho\|_p = 0. \quad (6.7)$$

Sia ora  $\rho > 0$  fissato. Siccome  $S_0$  é denso in  $L^p(\mathbb{R})$ , esiste una successione  $(h_k)_k$  di funzioni in  $S_0$  con supporto contenuto nell'intervallo  $[-\rho, \rho]$  tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|f_\rho - h_k\|_p = 0. \quad (6.8)$$

Sempre utilizzando la disuguaglianza di Hölder otteniamo anche la (6.8) per  $p = 1$  e quindi per il Teorema 5 del Capitolo 5, si ha anche  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\widehat{f}_\rho - \widehat{h}_k\|_\infty = 0$  da cui  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \widehat{h}_k(v) = \widehat{f}_\rho(v)$  per ogni  $v \in \mathbb{R}$ . Ora, dalla (6.5) risulta

$$\|Tf_\rho - \widehat{h}_k\|_{p'} \leq \|f_\rho - h_k\|_p$$

e dalla (6.8) otteniamo

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|Tf_\rho - \widehat{h}_k\|_{p'} = 0.$$

Esiste allora una sottosuccessione  $(h_{k_j})_j$  tale che  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \widehat{h_{k_j}}(v) = (Tf_\rho)(v)$  quasi ovunque in  $\mathbb{R}$ . In conclusione si deve avere

$$(Tf_\rho)(v) = \widehat{f}_\rho(v), \quad \text{quasi ovunque} \quad (6.9)$$

con ciò estendendo la definizione a tutte le funzioni  $f_\rho$ . Ma dalla (6.5) questo implica che  $\|Tf - \widehat{f}_\rho\|_{p'} \leq \|f - f_\rho\|_p$  e quindi l'asserto segue dalla (6.7).

Siamo ora pronti per introdurre la definizione di trasformata di Fourier di una funzione in  $L^p(\mathbb{R})$ , con  $1 < p < 2$ . Per  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 < p < 2$  la trasformata di Fourier di  $f$  é la funzione (univocamente determinata)  $F^p[f] \in L^{p'}(\mathbb{R})$  tale che

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\| F^p[f](\cdot) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\rho}^{\rho} f(u) e^{-i(\cdot)u} du \right\|_{p'} = 0. \quad (6.10)$$

Sussiste il seguente

**Teorema 5** *La trasformata di Fourier definita nella (6.10) definisce una trasformazione lineare limitata di  $L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 < p < 2$ , in  $L^{p'}(\mathbb{R})$  tale che, per  $f \in L^p(\mathbb{R})$*

$$\|F^p[f]\|_{p'} \leq \|f\|_p. \quad (6.11)$$

La disuguaglianza (6.11) é nota come "disuguaglianza di Titchmarsh". La proposizione che segue é di fondamentale importanza e stabilisce una proprietá di "consistenza" tra le definizioni di trasformata di Fourier.

**Proposizione 5** *Se  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$  con  $1 < p \leq 2$ , allora  $F^1[f](v) \equiv \widehat{f}(v) = F^p[f](v)$  quasi ovunque.*

**Dimostrazione.** Dalla definizione di trasformata di Fourier in  $L^p(\mathbb{R})$  segue che esiste una sottosuccessione  $(\rho_k)$  tale che

$$F^p[f](v) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\rho_k}^{\rho_k} f(u) e^{-ivu} du, \quad \text{quasi ovunque.}$$

Siccome  $f \in L^1(\mathbb{R})$  per le proprietá di continuitá della trasformata in  $L^1(\mathbb{R})$  si ha che il limite esiste per ogni  $v \in \mathbb{R}$  e

$$F^p[f](v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-ivu} du = \widehat{f}(v),$$

per quasi tutti i punti  $v \in \mathbb{R}$ , da cui segue l'asserto.

La proposizione precedente ci permette di denotare la trasformata di Fourier di una funzione  $f \in L^p(\mathbb{R})$  semplicemente con il simbolo  $\widehat{f}$  quando sarà chiaro dal contesto lo spazio considerato, altrimenti continueremo ad usare la notazione  $F^p[f]$ .

### 6.3 Proprietá fondamentali

In questa sezione studiamo alcune proprietá fondamentali della trasformata di Fourier di funzioni  $f \in L^p(\mathbb{R})$  con  $1 < p \leq 2$ . Sussiste la seguente

**Proposizione 6** *Se  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 < p \leq 2$ , allora per ogni fissato  $h \in \mathbb{R}$  e  $a > 0$ :*

$$(i) \quad \widehat{f(\cdot + h)}(v) = e^{ihv} \widehat{f}(v) \quad q.o.$$

$$(ii) \quad e^{-ih(\cdot)} \widehat{f(\cdot)}(v) = \widehat{f}(v + h) \quad q.o.$$

$$(iii) \quad \widehat{f(\cdot/a)}(v) = a \widehat{f}(av) \quad q.o.$$

La dimostrazione é semplice e sfrutta le analoghe proprietá della trasformata in  $L^1(\mathbb{R})$  applicate alla funzione  $f_\rho$ .

Il teorema seguente stabilisce l'estensione del teorema di convoluzione al caso della trasformata di Fourier in  $L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 < p \leq 2$ . Ricordiamo (vedi paragrafo 2.2) che il prodotto di convoluzione tra una funzione  $f \in L^p(\mathbb{R})$  ed una funzione  $g \in L^1(\mathbb{R})$  definisce una funzione in  $L^p(\mathbb{R})$ . Sussiste il seguente

**Teorema 6** *Se  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 < p \leq 2$  e  $g \in L^1(\mathbb{R})$  allora*

$$F^p[f * g](v) = F^p[f](v)F^1[g](v) \quad q.o. \quad (6.12)$$

**Dimostrazione.** Intanto osserviamo che entrambi i membri della (6.12) sono ben definiti. Assumiamo prima che  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ . Allora in tal caso l'asserto segue subito dal Teorema 10 del Capitolo 5 e dalla Proposizione 5. Nel caso generale, se  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 < p \leq 2$ , allora le funzioni  $f_\rho$  in (6.2) appartengono a  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$  per ogni  $\rho > 0$  e quindi



$F^p[f_\rho * g](v) = F^p[f_\rho](v)F^1[g](v)$  per ogni  $v \in \mathbb{R}$ . Utilizzando ora le disuguaglianze di Minkowski e di Titchmarsh, otteniamo

$$\begin{aligned} & \|F^p[f * g] - F^p[f]F^1[g]\|_{p'} \\ & \leq \|F^p[f * g] - F^p[f_\rho * g]\|_{p'} + \|F^p[f_\rho]F^1[g] - F^p[f]F^1[g]\|_{p'} \\ & \leq \|(f - f_\rho) * g\|_p + \|F^1[g]\|_\infty \|F^p[f_\rho - f]\|_{p'} \\ & \leq 2\|g\|_1 \|f - f_\rho\|_p, \end{aligned}$$

che tende a 0 per  $\rho \rightarrow \infty$ . Da questo segue l'asserto.

Il prossimo risultato é una estensione della formula di Parseval (5.12) alle funzioni  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 < p \leq 2$ .

**Teorema 7** *Se  $f, g \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 < p \leq 2$ , allora*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(v)g(v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\widehat{g}(v)dv. \quad (6.13)$$

**Dimostrazione.** La formula sussiste nel caso delle funzioni "troncate" (appartenenti ad  $L^1(\mathbb{R})$ ),  $f_{\rho_1}$  e  $g_{\rho_2}$  con  $\rho_1, \rho_2 > 0$ , cioè risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_{\rho_1}(v)g_{\rho_2}(v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\rho_1}(v)\widehat{g}_{\rho_2}(v)dv.$$

Inoltre dalla disuguaglianza di Titchmarsh si deduce

$$\lim_{\rho_1 \rightarrow +\infty} \|\widehat{f} - \widehat{f}_{\rho_1}\|_{p'} = 0, \quad \lim_{\rho_1 \rightarrow +\infty} \|f - f_{\rho_1}\|_p = 0,$$

e quindi facendo il limite per  $\rho_1 \rightarrow +\infty$  ed usando la disuguaglianza di Hölder, otteniamo, per ogni  $\rho_2 > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(v)g_{\rho_2}(v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\widehat{g}_{\rho_2}(v)dv$$

da cui l'asserto facendo il limite  $\rho_2 \rightarrow +\infty$ .

Nel caso particolare  $p = 2$  la (6.13) può essere scritta in termini di prodotto scalare in  $L^2(\mathbb{R})$  nella forma

$$\langle \widehat{f}, \overline{g} \rangle = \langle f, \widehat{\overline{g}} \rangle.$$

Passiamo ora all'estensione delle formule relative alla trasformata delle derivate. Sussiste la seguente estensione:

**Teorema 8** Per  $1 < p \leq 2$  sia  $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap AC_{loc}^{k-1}$  tale che  $f^{(k)} \in L^p(\mathbb{R})$ . Allora

$$\widehat{f^{(k)}}(v) = (iv)^k \widehat{f}(v), \quad q.o. \quad (6.14)$$

**Dimostrazione.** Poniamo  $k = 1$ . Proponiamo una diversa dimostrazione rispetto a quella svolta nel caso  $p = 1$ . Per la locale assoluta continuità di  $f$  possiamo scrivere

$$f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} f'(t) dt = \int_{-h}^0 f'(x-u) du = (f' * m_h)(x),$$

dove  $m_h(u) = \sqrt{2\pi} \chi_{]-h,0[}(u)$ , essendo  $\chi_I$  la funzione caratteristica dell'intervallo  $I$ . Si ha che  $m_h \in L^p(\mathbb{R})$  per ogni  $p \in [1, +\infty]$  ed inoltre

$$\widehat{m}_h(v) = \frac{1}{iv} (e^{ivh} - 1), \quad \text{se } v \neq 0$$

e  $\widehat{m}_h(0) = h$ . Passando alle trasformate di Fourier, possiamo applicare il teorema 6 e la proposizione 6 (i), ottenendo, per  $v \neq 0$ ,

$$(e^{ivh} - 1) \widehat{f}(v) = \frac{\widehat{f'}(v)}{iv} (e^{ivh} - 1),$$

da cui segue la (14) per  $k = 1$ . Il caso generale si può provare per induzione.

Per  $k \in \mathbb{N}$  e  $p \leq 2$  definiamo ora lo spazio di Sobolev  $W^{k,p}(\mathbb{R})$  come lo spazio di tutte le funzioni  $f \in L^p(\mathbb{R})$  tali che  $f = \varphi$  q.o.,  $\varphi \in AC_{loc}^{k-1}$ ,  $\varphi^{(j)} \in L^p(\mathbb{R})$  per ogni  $j = 1, \dots, k$ .

È possibile dimostrare una interessante connessione tra la formula (6.14) e gli spazi di Sobolev, nel caso  $1 < p \leq 2$ . Si ha infatti il seguente teorema, del quale non riporteremo la dimostrazione.

**Teorema 9** Se per  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 < p \leq 2$ , esiste una funzione  $g \in L^p(\mathbb{R})$  tale che

$$(iv)^k \widehat{f}(v) = \widehat{g}(v), \quad q.o. \quad (6.15)$$

allora  $f \in W^{k,p}(\mathbb{R})$ .

## 6.4 Inversione

Analogamente al Teorema 11 del Capitolo 5, sussiste intanto il seguente teorema:

**Teorema 10** *Sia  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 < p \leq 2$ . Se  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  allora risulta*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(v) e^{ixv} dv, \quad q.o. x \in \mathbb{R}. \quad (6.16)$$

*Se poi la funzione  $\widehat{f}$  è anche continua, allora l'uguaglianza vale per ogni  $x$ .*

In generale, si noti che l'integrale nella (6.16) che definisce la trasformazione inversa non è ben definito come integrale di Lebesgue, se  $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$ . Pertanto per definire la trasformazione inversa utilizzeremo una tecnica analoga a quella utilizzata per la trasformata. Iniziando dal caso  $p = 2$  si ha il seguente teorema

**Teorema 11** *Se  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , allora*

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\| f(\cdot) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\rho}^{\rho} \widehat{f}(v) e^{i(\cdot)v} dv \right\|_2 = 0. \quad (6.17)$$

**Dimostrazione.** Siccome  $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ , lo stesso avviene per la funzione  $\widehat{\widehat{f}}$  e risulta  $\overline{\widehat{f}(x)} = \widehat{\widehat{f}}(x)$  quasi ovunque. Infatti utilizzando la formula di Parseval scritta in termini di prodotto scalare, si ha

$$\|\overline{\widehat{f}} - \widehat{\widehat{f}}\|_2^2 = \langle \overline{\widehat{f}} - \widehat{\widehat{f}}, \overline{\widehat{f}} - \widehat{\widehat{f}} \rangle = 2\|f\|_2^2 - \langle \overline{\widehat{\widehat{f}}}, \overline{\widehat{f}} \rangle - \langle \widehat{\widehat{f}}, \overline{\widehat{f}} \rangle.$$

Ora dalla (6.13) si ha

$$\langle \widehat{\widehat{f}}, \overline{\widehat{f}} \rangle = \langle \overline{\widehat{f}}, \widehat{\widehat{f}} \rangle = \|f\|_2^2$$

e quindi l'asserto. Da questo si ha  $\overline{\widehat{f}(x)} = \widehat{\widehat{f}}(x)$  quasi ovunque.

Pertanto dalla definizione di trasformata di Fourier in  $L^2(\mathbb{R})$  otteniamo

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\| \overline{\widehat{f}(\cdot)} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\rho}^{\rho} \overline{\widehat{f}(u)} e^{-i(\cdot)u} du \right\|_2 = 0,$$

e quindi passando ai coniugati si ha la (6.17).

Come conseguenza della definizione di trasformata di Fourier in  $L^2(\mathbb{R})$  e del Teorema 11 otteniamo il seguente teorema, noto come Teorema di Plancherel:

**Teorema 12** *Per ogni  $f \in L^2(\mathbb{R})$  esiste una funzione  $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ , chiamata la trasformata di Fourier di  $f$ , tale che  $\|\widehat{f} - \widehat{f}_\rho\|_2 \rightarrow 0$  per  $\rho \rightarrow +\infty$ . Analogamente, sussiste la relazione (6.17). Le funzioni  $f, \widehat{f}$  soddisfano la relazione (Parseval)  $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$ . Ogni funzione  $f \in L^2(\mathbb{R})$  é la trasformata di Fourier di un'unica funzione in  $L^2(\mathbb{R})$ .*

Un'altra importante conseguenza é il seguente risultato, valido per funzioni in  $L^2(\mathbb{R})$ : Se  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , allora  $\langle f, g \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle$ . Infatti, dalla (6.13) e dall'identitá  $\bar{g} = \widehat{\widehat{g}}$  otteniamo

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \langle f, g \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \bar{g}(v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \widehat{\widehat{g}}(v) dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(v) \widehat{g}(v) dv = \sqrt{2\pi} \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle. \end{aligned}$$

Da ciò si deduce che la trasformata di Fourier in  $L^2(\mathbb{R})$  é un isomorfismo dello spazio di Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$  in se stesso.

Il Teorema 11 sussiste anche nel caso  $1 < p < 2$ , cioè per ogni  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 < p < 2$ , risulta

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\| f(\cdot) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\rho}^{\rho} \widehat{f}(v) e^{i(\cdot)v} dv \right\|_p = 0.$$

La dimostrazione fa uso di tecniche legate alla trasformata di Hilbert che qui non vengono trattate (per approfondimenti si veda Butzer-Nessel [5]).

Infine, dai teoremi precedenti segue l'iniettivitá della trasformata di Fourier in  $L^p(\mathbb{R})$ . Sussiste infatti la seguente

**Proposizione 7** *Siano  $f, g \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 < p \leq 2$ . Se  $\widehat{f}(v) = \widehat{g}(v)$  quasi ovunque, allora  $f(x) = g(x)$  quasi ovunque.*

Anche nel caso  $1 < p \leq 2$  é possibile utilizzare la teoria dei teta-fattori per ottenere formule generalizzate di inversione nella norma dello spazio  $L^p$ . Per ogni teta-fattore  $\Theta$ , definiamo come nella sezione 5.4 le teta-medie, per  $\rho > 0$ ,

$$U_\rho(f, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta\left(\frac{\lambda}{\rho}\right) \widehat{f}(\lambda) e^{ix\lambda} d\lambda.$$

Riportiamo qui il seguente teorema

**Teorema 13** *Sia  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 < p \leq 2$ . Si ha*

- $\|U_\rho(f, \cdot)\|_p \leq \|\widehat{\Theta}\|_1 \|f\|_p$ ,
- *L'integrale nella formula di inversione é  $\Theta$ -sommabile nella norma  $L^p(\mathbb{R})$  ad  $f$ , cioè si ha:*

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \|U_\rho(f, \cdot) - f(\cdot)\|_p = 0.$$

La dimostrazione é analoga a quella del teorema 12 del Capitolo 5, tenendo conto della rappresentazione

$$U_\rho(f, x) = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) \widehat{\Theta}(\rho u) du,$$

e del fatto che l'operatore di traslazione é continuo in  $L^p(\mathbb{R})$ .

Concludiamo questa sezione osservando che il metodo utilizzato per definire la trasformata di Fourier in  $L^p(\mathbb{R})$  funziona solo se  $1 \leq p \leq 2$ . Esistono esempi che mostrano come tale metodo non funziona se  $p > 2$ . Uno di questi é il seguente (si veda [17], vol. II, pag. 258). Sia  $p > 2$ , e consideriamo la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita dalla legge

$$f(x) = \begin{cases} a_n, & 2^n - 1/2 \leq |x| \leq 2^n + 1/2 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

con  $n = 1, 2, \dots$  e  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é una successione numerica tale che  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < +\infty$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = +\infty$ . Si ha  $f \in L^p(\mathbb{R})$ . Fissato  $\rho > 0$  la trasformata di Fourier della funzione  $f_\rho$  é data dalla

$$\widehat{f}_\rho(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2 \sin(v/2)}{v} \sum_{2^n \leq \rho} a_n \cos(2^n v) + o(1),$$

dove il termine  $o(1)$  é uniforme rispetto a  $v$ . Ora é possibile dimostrare (cfr. [17]) che il limite

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \sum_{2^n \leq \rho} a_n \cos(2^n v)$$

non esiste in alcun modo e pertanto la trasformata  $\widehat{f}$  non può essere definita con il processo di limite utilizzato precedentemente.

Nel seguito accenneremo brevemente ad un approccio generale che funziona per tutti gli spazi  $L^p$  e che é basato sulla teoria delle distribuzioni.

## 6.5 Applicazioni al calcolo di integrali

In questa sezione discutiamo alcune applicazioni della teoria sviluppata nelle sezioni precedenti al calcolo di integrali che non possono essere calcolati elementarmente.

(1) Calcoliamo l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

Il metodo consiste nell'interpretare l'integrale come la norma in  $L^2$  della trasformata di una funzione nota il cui integrale sia semplice da calcolare ed usare quindi l'equazione di Parseval  $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$ . Posto  $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$ , si ha  $\|f\|_2^2 = \sqrt{2/\pi}$ . Inoltre,

$$\widehat{f}(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin v}{v}$$

e quindi

$$\|\widehat{f}\|_2^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv,$$

da cui, per l'equazione di Parseval, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi.$$

(2) Calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx.$$

Applichiamo il metodo utilizzato nell'esercizio precedente, considerando ora la funzione  $f(x) = (1 - |x|)\chi_{[-1,1]}(x)$ . Si ha

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

e la trasformata di Fourier é data dalla

$$\widehat{f}(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos v}{v^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\sin(v/2)}{(v/2)} \right)^2.$$

Quindi, utilizzando ancora l'equazione di Parseval,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(v)|^2 dv = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{2}{3},$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx = \frac{2}{3} \pi.$$

- (3) Le formule ottenute nei precedenti due esempi possono essere generalizzate al caso degli integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^n} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Infatti considerate le funzioni “spline” di ordine  $n \in \mathbb{N}$  definite dalle

$$M_n(x) := \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \left( \frac{n}{2} + x - j \right)_+^{n-1},$$

dove per ogni numero reale  $r$  con  $r_+$  denotiamo la parte positiva di  $r$ , cioè  $r_+ = \max\{r, 0\}$ , risulta

$$\widehat{M}_n(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\sin(v/2)}{v/2} \right)^n.$$

Ad esempio, per  $n = 3$  otteniamo la spline di ordine 3 definita dalla

$$M_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(|x| + \frac{3}{2})^2 - \frac{3}{2}(|x| + \frac{1}{2})^2, & |x| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(-|x| + \frac{3}{2})^2, & \frac{1}{2} < |x| \leq \frac{3}{2} \\ 0, & |x| > \frac{3}{2}, \end{cases}$$

la cui trasformata di Fourier é

$$\widehat{M}_3(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\sin(v/2)}{v/2} \right)^3.$$

Per approfondimenti si veda [6].

(4) Dati due numeri positivi  $a, b$ , determiniamo il valore dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(at) \sin(bt)}{t^2} dt.$$

Qui adoperiamo la formula di Parseval  $\langle f, g \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle$ . Posto  $f_a(x) = \chi_{[-a, a]}(x)$ , si ha

$$\widehat{f}_a(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(av)}{v}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(at) \sin(bt)}{t^2} dt &= \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \widehat{f}_a(v) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \widehat{f}_b(v) dv \\ &= \sqrt{2\pi} \frac{\pi}{2} \langle f_a, f_b \rangle = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-a, a]}(v) \chi_{[-b, b]}(v) dv = \pi \min\{a, b\}. \end{aligned}$$

(5) Questo esempio é una variante dell'esercizio (4). Determiniamo, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , il valore dell'integrale:

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(5(u-t)) \sin(6u)}{u(u-t)} du.$$

Osserviamo intanto che l'integrale esiste come integrale di Lebesgue (provarlo!). Sia  $t \neq 0$ . Come nell'esercizio precedente, si ha

$$\frac{\sin(5u)}{u} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \widehat{\chi_{[-5, 5]}}(u),$$

quindi, usando le proprietà della trasformata di Fourier,

$$\frac{\sin(5(u-t))}{u-t} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \widehat{\chi_{[-5, 5]}}(u-t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{iut} \widehat{\chi_{[-5, 5]}}(u).$$



Pertanto, dalla relazione  $\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = \langle f, g \rangle$  si ha

$$I(t) = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iut} \widehat{\chi_{[-5,5]}}(u) \widehat{\chi_{[-6,6]}}(u) du = \frac{\pi}{2} \int_{-5}^5 e^{iut} du = \frac{\pi}{t} \sin(5t).$$

Se  $t = 0$  otteniamo  $I(0) = 5\pi$ .

- (6) Dimostriamo la seguente importante proprietà: se  $f \in W^{1,2}(\mathbb{R})$  allora  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ .

Per il teorema di Plancherel, dall'ipotesi si ha  $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$  e  $\widehat{f}' \in L^2(\mathbb{R})$ . Dalla formula della derivata  $\widehat{f}'(v) = (iv)\widehat{f}(v)$ , si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+v^2)|\widehat{f}(v)|^2 dv = \|\widehat{f}\|_2^2 + \|\widehat{f}'\|_2^2 < +\infty.$$

Utilizzando ora la disuguaglianza di Hölder, si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(v)| dv &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(v)| \sqrt{1+v^2} \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} dv \\ &\leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(v)|^2 (1+v^2) dv \right)^{1/2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+v^2} dv \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{\pi} (\|\widehat{f}\|_2^2 + \|\widehat{f}'\|_2^2) \end{aligned}$$

e quindi l'asserto.

- (7) Calcoliamo ora la trasformata di Fourier della funzione ( $a > 0$ )

$$f(x) = e^{-x} x^{a-1} \chi_{[0,+\infty[}(x).$$

Questo calcolo fa uso della definizione della funzione Gamma di Eulero

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx.$$

Si ha, operando un semplice cambiamento di variabile,

$$\widehat{f}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x-ixv} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma(a) \frac{1}{(1+iv)^a}.$$

(8) Per ogni  $t \in \mathbb{R}$  proviamo l'identità:

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin(y-t)}{y-t} dy = \int_{-1}^1 \frac{\sin y}{y} e^{iyt} dy.$$

Posto  $f(y) = \chi_{[-1,1]}(y)$  e  $g(x) = e^{ixt} f(x)$ , si ha

$$\widehat{g}(v) = \widehat{f}(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(v-t)}{v-t}$$

e quindi, usando la formula di Parseval (6.13), si ottiene facilmente l'asserto (provare i dettagli).

(9) Posto, per  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{sinc}(x) := \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, \quad x \neq 0$$

e  $\text{sinc}(0) = 1$ , l'insieme delle funzioni  $\{\sqrt{2\pi} \text{sinc}(\cdot - k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$  é ortonormale in  $L^2(\mathbb{R})$ . Infatti come negli esempi (4) e (5), posto  $f_\pi(x) = \chi_{[-\pi, \pi]}(x)$ , si ha

$$\text{sinc}(v - k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik(\cdot)} \widehat{f_\pi(\cdot)}(v),$$

e pertanto l'asserto segue facilmente dalla relazione di Parseval  $\langle f, g \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle$ .

# Chapter 7

## Il teorema del campionamento

In questo capitolo tratteremo la teoria del campionamento che ha come fondamentale applicazione la ricostruzione di segnali a partire da certi valori campione. In sostanza si tratta di un teorema di interpolazione che permette di ricostruire puntualmente una funzione a partire da un insieme discreto di valori noti della stessa funzione. Nella prima sezione tratteremo l'approccio elementare, mentre nella seconda introdurremo le classi di Bernstein, enunceremo il teorema di Paley-Wiener e la forma generale del teorema del campionamento. Nella sezione 3 illustreremo delle notevoli conseguenze del teorema generale di campionamento. Infine, studieremo alcune interessanti proprietà delle funzioni "band-limited" cioè quelle funzioni che hanno la trasformata di Fourier a supporto limitato.

### 7.1 Il teorema del campionamento di Shannon

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua assegnata. Il problema di cui ci occupiamo in questo paragrafo è quello della ricostruzione della  $f$  a partire da certi "valori campionati"  $f_n = f(nT)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , con  $T > 0$  opportuno.

Questo problema è di fondamentale importanza nella teoria dei segnali, perchè è la base teorica su cui si fonda la ricostruzione di segnali. Supponiamo che  $f \in L^1(\mathbb{R})$  sia una funzione continua e "a banda limitata", cioè la sua trasformata di Fourier  $\hat{f}$  si annulla al di fuori di un intervallo compatto. In simboli  $\hat{f}(\lambda) = 0$  per ogni  $|\lambda| > \lambda_0$ . In queste ipotesi è chiaro che  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  e

quindi sussiste la formula di inversione

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda_0}^{+\lambda_0} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda,$$

per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

Infine supponiamo che  $\widehat{f}$  sia sviluppabile in serie di Fourier in  $\mathbb{R}$  prolungandola con periodicità  $2\lambda_0$  ed inoltre supponiamo che la serie di Fourier di  $\widehat{f}$  sia uniformemente convergente. Sotto le suddette ipotesi sussiste il seguente sviluppo (teorema di campionamento):

**Teorema 1** Sia  $T = \pi/\lambda_0$ . Per ogni  $t \in \mathbb{R}$  risulta

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \frac{\sin(\lambda_0 t - n\pi)}{\lambda_0 t - n\pi}.$$

**Dimostrazione.** Scrivendo la serie di Fourier della  $\widehat{f}$  in forma complessa risulta:

$$\widehat{f}(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{in\pi\lambda/\lambda_0},$$

dove

$$A_n = \frac{1}{2\lambda_0} \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} \widehat{f}(\lambda) e^{-in\pi\lambda/\lambda_0} d\lambda, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Sostituendo nella formula di inversione, otteniamo

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{in\pi\lambda/\lambda_0} \right] e^{i\lambda t} d\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} e^{i(\lambda_0 t + n\pi)\lambda/\lambda_0} d\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \left[ \frac{e^{i(\lambda_0 t + n\pi)\lambda/\lambda_0}}{i(\lambda_0 t + n\pi)/\lambda_0} \right]_{-\lambda_0}^{\lambda_0} \\ &= \lambda_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \frac{\sin(\lambda_0 t + n\pi)}{\lambda_0 t + n\pi}. \end{aligned}$$

Sempre dalla formula di inversione ponendo  $t = nT$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , si ha:

$$f_n := f(nT) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} \widehat{f}(\lambda) e^{in\lambda T} d\lambda,$$

mentre scrivendo i coefficienti di Fourier di  $\widehat{f}$  cambiando  $n$  in  $-n$  si ottiene

$$A_{-n} = \frac{1}{2\lambda_0} \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} \widehat{f}(\lambda) e^{in\pi\lambda/\lambda_0} d\lambda.$$

Scegliendo allora  $T = \pi/\lambda_0$  si ha

$$f_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda_0 A_{-n}.$$

Sostituendo nella serie otteniamo quindi

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{-n} \frac{\sin(\lambda_0 t + n\pi)}{\lambda_0 t + n\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{\sin(\lambda_0 t - n\pi)}{\lambda_0 t - n\pi},$$

cioè l'asserto.

Ponendo

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

la formula espressa dal teorema di campionamento si scrive

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \text{sinc}\left(\frac{\lambda_0 t}{\pi} - n\right).$$

Questa formula fornisce una rappresentazione di  $f(t)$  del tipo

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \varphi_n(t),$$

dove  $f_n = f(nT)$  sono i valori campionati ugualmente spaziatissimi sull'asse reale e le funzioni  $\varphi_n$  non dipendono da  $f$ . Si noti il carattere "interpolante" della serie: se scegliamo  $t = n\pi/\lambda_0$  otteniamo esattamente una identità.

Si osservi che la scelta del valore di  $T$  è fondamentale perchè in tal caso è possibile ricostruire completamente  $f(t)$  a partire dai valori  $f_n$ . Se invece  $T < \pi/\lambda_0$  parte dell'informazione disponibile è ridondante (oversampling), mentre se  $T > \pi/\lambda_0$  le informazioni date sono insufficienti e si perviene ad un segnale diverso da  $f(t)$ , cioè ad una "distorsione" del segnale stesso.

## 7.2 Le classi di Bernstein e il teorema di Paley-Wiener

In questa sezione enunceremo una forma generale del teorema del campionamento, introducendo le classi di Bernstein ed enunciando il teorema di Paley-Wiener.

Sia  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  una funzione complessa. Diremo che  $f$  é di tipo esponenziale  $\sigma$  se esiste una costante  $C > 0$  tale che

$$|f(z)| \leq C e^{\sigma |\Im z|} \quad (z \in \mathbf{C}),$$

dove  $\Im z$  denota la parte immaginaria del numero complesso  $z$ . Per  $\sigma > 0$  e  $p \in [1, +\infty]$  denotiamo con  $B_\sigma^p$  lo spazio di Bernstein comprendente tutte le funzioni intere  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  di tipo esponenziale  $\sigma$  la cui restrizione ad  $\mathbb{R}$  appartiene allo spazio  $L^p(\mathbb{R})$ . Ricordiamo che una funzione complessa si dice "intera" se essa é analitica in tutto il piano complesso.

Per le classi di Bernstein sussistono le inclusioni, per  $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ ,

$$B_\sigma^1 \subset B_\sigma^{p_1} \subset B_\sigma^{p_2} \subset B_\sigma^\infty.$$

Infatti, osserviamo anzitutto che se  $f$  é di tipo esponenziale  $\sigma$ , la sua restrizione sull'asse reale é limitata dalla costante  $C$ . Pertanto se ad esempio  $f \in B_\sigma^1$ , allora si ha:

$$|f(x)|^p = |f(x)| |f(x)|^{p-1} \leq C^{p-1} |f(x)|,$$

da cui si ricava che  $f \in L^p(\mathbb{R})$ .

Sussiste il seguente Lemma, che utilizzeremo in seguito.

**Lemma 1** *Se  $f \in B_\sigma^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , allora risulta*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x + iy) = 0,$$

*uniformemente rispetto ad  $y$  in ogni insieme limitato.*

La dimostrazione é omessa (si può consultare [2], Chapter 6).

Se  $1 \leq p \leq 2$  denotiamo con  $\widehat{B}_\sigma^p$  lo spazio di tutte le funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{C}$  tali che  $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$  e  $\widehat{f}(v) = 0$  quasi ovunque nell'insieme  $|v| > \sigma$ , cioè il supporto di  $\widehat{f}$  é contenuto nell'intervallo  $[-\sigma, \sigma]$ .

Osserviamo che se  $f \in \widehat{B}_\sigma^p$  allora  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  e pertanto sussiste il Teorema 10 del Capitolo 6, cioè

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \widehat{f}(v) e^{ivx} dv \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Il seguente teorema di Paley-Wiener stabilisce una sostanziale equivalenza tra le due classi  $B_\sigma^p, \widehat{B}_\sigma^p$ .

**Teorema 2 (Paley-Wiener)** Sia  $\sigma > 0$  e  $p \in [1, 2]$ .

(a) Se  $f \in B_\sigma^p$  allora  $\widehat{f}(v) = 0$  quasi ovunque per  $|v| > \sigma$  cioè

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \widehat{f}(v) e^{ivz} dv \quad (z \in \mathbf{C}).$$

(b) Se  $f \in \widehat{B}_\sigma^p$  allora  $f$  può essere estesa a tutto il piano complesso ad una funzione che appartiene allo spazio di Bernstein  $B_\sigma^p$ .

**Dimostrazione.** Forniamo la dimostrazione nel caso  $p = 2$  (per il caso generale si procede in modo analogo). Sia  $f \in B_\sigma^2$ . Indicata con  $\widehat{f}$  la trasformata di Fourier di  $f$ , per la formula di inversione si può scrivere

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(v) e^{ivx} dv,$$

dove l'integrale  $\int_{-\infty}^{+\infty}$  va interpretato come limite in  $L^2(\mathbb{R})$  degli integrali  $\int_{-\rho}^{\rho}$  per  $\rho \rightarrow +\infty$ . Dobbiamo provare che se  $|v| > \sigma$ , allora  $\widehat{f}(v) = 0$  quasi ovunque. Cominciamo col caso  $v < -\sigma$  e, per  $\rho > 0$ , consideriamo l'integrale curvilineo

$$A = \int_{\Gamma} f(z) e^{-ivz} dz,$$

dove  $\Gamma$  è la frontiera del rettangolo del semipiano superiore di vertici  $(-\rho, 0)$ ,  $(\rho, 0)$ ,  $(\rho, \rho)$ ,  $(-\rho, \rho)$ . Poiché  $f$  è intera, per il teorema integrale di Cauchy, si ha  $A = 0$ . Pertanto, indicata con  $I$  la parte di frontiera costituita dai segmenti congiungenti i punti  $(\rho, 0)$ ,  $(\rho, \rho)$ ;  $(\rho, \rho)$ ,  $(-\rho, \rho)$ ; e  $(-\rho, \rho)$ ,  $(-\rho, 0)$ ; si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-\rho}^{\rho} f(x) e^{-ivx} dx &= -I = \int_{-\rho}^{\rho} f(x + i\rho) e^{-iv(x+i\rho)} dx \\ &+ i \int_0^{\rho} f(-\rho + iy) e^{-iv(-\rho+iy)} dy - i \int_0^{\rho} f(\rho + iy) e^{-iv(\rho+iy)} dy \\ &=: I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Poiché  $f \in B_\sigma^2$ , si ha

$$|I_1| \leq 2C\rho e^{(\sigma+v)\rho}$$

e siccome  $v < -\sigma$ , si ha subito  $I_1 \rightarrow 0$  per  $\rho \rightarrow +\infty$ . Per  $I_2$ , fissiamo arbitrariamente un  $r \in ]0, \rho[$ , e scriviamo

$$I_2 = i \left\{ \int_0^r + \int_r^\rho \right\} f(-\rho + iy) e^{-iv(-\rho+iy)} dy =: I_{2,1} + I_{2,2}.$$

Per  $I_{2,1}$ , essendo  $v$  negativo, si ha

$$|I_{2,1}| \leq \int_0^r |f(-\rho + iy)| e^{vy} dy \leq \int_0^r |f(-\rho + iy)| dy$$

e dal Lemma 1 segue subito  $I_{2,1} \rightarrow 0$ . Per quanto riguarda il termine  $I_{2,2}$  si ha

$$|I_{2,2}| \leq \frac{C}{\sigma + v} \left( e^{(\sigma+v)\rho} - e^{(\sigma+v)r} \right),$$

e per  $r, \rho \rightarrow +\infty$  si ha ancora  $I_{2,2} \rightarrow 0$ . Per  $I_3$  si procede in modo del tutto analogo. In conclusione  $I \rightarrow 0$  per  $\rho \rightarrow +\infty$ . Indicate con  $f_\rho$  le funzioni definite nella (6.2) del Capitolo 6, ciò implica che  $\widehat{f}_\rho(v) \rightarrow 0$  per  $v < -\sigma$ , ed infine siccome  $\|\widehat{f}_\rho - \widehat{f}\|_2 \rightarrow 0$ , si ha  $\widehat{f}(v) = 0$  quasi ovunque per  $v < -\sigma$ .

Se invece  $v > \sigma$ , si procede analogamente considerando il rettangolo nel semipiano inferiore con vertici  $(-\rho, 0)$ ,  $(-\rho, -\rho)$ ,  $(\rho, -\rho)$ ,  $(\rho, 0)$ . Da questo segue (a).

Proviamo ora (b). Siccome  $f \in \widehat{B}_\sigma^2$  allora, per il teorema di inversione, si può estendere la funzione  $f$  al campo complesso ponendo

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \widehat{f}(v) e^{ivz} dv \quad (z \in \mathbf{C}).$$

Supponendo per semplicità che  $\widehat{f}$  sia una funzione reale, posto  $z = x + iy$  e  $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ , si ha

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \widehat{f}(v) e^{-vy} \cos(vx) dv,$$

$$v(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \widehat{f}(v) e^{-vy} \sin(vx) dv,$$



e facilmente si vede che  $u, v$  sono differenziabili e soddisfano le equazioni di Cauchy- Riemann per ogni  $(x, y) \in \mathbf{C}$ . Dunque  $f$  é intera. Infine,

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} |\widehat{f}(v)| e^{-vy} dv \leq \|\widehat{f}\|_1 e^{\sigma|\Im z|},$$

cioé  $f$  é di tipo esponenziale  $\sigma$  con costante  $C = \|\widehat{f}\|_1$ . Il teorema é quindi completamente provato.

Enunciamo ora una versione complessa del teorema del campionamento per funzioni  $B_{\sigma}^2$ .

**Teorema 3** Per ogni  $f \in B_{\sigma}^2$  con  $\sigma > 0$ , si ha

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\sigma}{\pi}z - k\right) \quad (z \in \mathbf{C}). \quad (7.1)$$

La serie converge assolutamente ed uniformemente sui compatti di  $\mathbf{C}$  e anche nella norma dello spazio  $L^2(\mathbb{R})$ .

Infine la versione generale del teorema per funzioni  $f \in B_{\sigma}^{\infty}$  si enuncia nel seguente modo:

**Teorema 4** Per ogni  $f \in B_{\tau}^{\infty}$  con  $0 < \tau < \sigma$  vale la (7.1) nella quale la serie converge uniformemente sui sottoinsiemi compatti di  $\mathbf{C}$ .

### 7.3 La "Reproducing Kernel Formula" e la formula di Parseval

Una delle conseguenze teoriche piú significative del teorema generale di campionamento (teorema 3) é la "reproducing kernel formula", che ne rappresenta una versione "integrale". Tale formula si inserisce in quel settore dell'analisi funzionale che va sotto il nome di "teoria degli  $RK$ -Hilbert spaces" (cioé "reproducing kernel Hilbert spaces").

Sia  $(H, \langle, \rangle)$  uno spazio di Hilbert i cui elementi sono funzioni definite in un dominio  $D$  e a valori complessi. Supponiamo che esista una funzione  $K$  (che chiamiamo "nucleo"), definita in  $D \times D$  tale che le seguenti condizioni siano verificate:

(1) La funzione  $x \rightarrow K(x, y)$  appartiene ad  $H$ , per ogni  $y \in D$ .

(2) Per ogni  $f \in H$ , risulta

$$f(y) = \langle f, K(\cdot, y) \rangle, \quad (y \in D).$$

Una funzione  $K$  che verifica le due condizioni sopra riportate si chiama un “reproducing kernel” (RK-kernel). Uno spazio di Hilbert  $H$  con tale proprietà si chiama un  $RK$ -Hilbert space. Non faremo qui la teoria generale degli spazi di Hilbert  $RK$ , (per una trattazione sintetica si può consultare [10]). Osserviamo soltanto che se uno spazio di Hilbert possiede un RK-kernel, allora questo è necessariamente unico. Infatti se  $K_1$  e  $K_2$  fossero due RK-kernels in  $H$  si avrebbe di conseguenza

$$\langle f, K_1(\cdot, y) - K_2(\cdot, y) \rangle = 0$$

per ogni  $f \in H$ . Ma questo allora vale anche per ogni elemento  $\varphi_\alpha$  di un sistema ortonormale e pertanto  $K_1(\cdot, y) = K_2(\cdot, y)$  per ogni  $y$ .

Qui invece mostriamo come lo spazio  $B_\sigma^2$  sia uno spazio di Hilbert  $RK$ . Sussiste infatti il seguente

**Teorema 5** *Sia  $f \in B_\sigma^2$  con  $\sigma > 0$ . Si ha:*

$$f(z) = \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \operatorname{sinc}\left(\frac{\sigma}{\pi}(z - u)\right) du \quad (z \in \mathbf{C}). \quad (7.2)$$

**Dimostrazione.** Proveremo il teorema utilizzando il teorema 3, che sussiste perché  $f \in B_\sigma^2$ . Supponiamo dapprima  $\sigma = \pi$ . Sia  $z \in \mathbf{C}$  e  $u \in \mathbb{R}$ . La funzione  $z \rightarrow f(z + u)$  appartiene ancora allo spazio  $B_\pi^2$ . Pertanto possiamo applicare ad essa la formula (7.1). Cambiando  $z$  con  $z - u$  otteniamo:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k + u) \operatorname{sinc}(z - u - k).$$

Integrando rispetto ad  $u$  entrambi i lati della precedente relazione sull'intervallo  $[0, 1]$ , e integrando per serie (operazione lecita perché la serie converge uniformemente rispetto ad  $u$  sui sottoinsiemi compatti), otteniamo:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(k + u) \operatorname{sinc}(z - u - k) du \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} f(u) \operatorname{sinc}(z - u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \operatorname{sinc}(z - u) du, \end{aligned}$$

da cui si ha l'asserto.

Nel caso generale  $f \in B_\sigma^2$ ,  $\sigma \neq \pi$ , si applica la dimostrazione precedente alla funzione  $h(z) := f(\pi z/\sigma)$  che appartiene allo spazio  $B_\pi^2$ .

Il teorema precedente mostra che la funzione

$$K(x, y) := \text{sinc}(x - y)$$

individua (a meno di normalizzazioni) un  $RK$ -kernel nello spazio  $B_\pi^2$ .

Un'altra importante conseguenza è la formula generale di Parseval, illustrata dal seguente teorema.

**Teorema 6** *Se  $f, g \in B_\sigma^2$ , con  $\sigma > 0$  risulta:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\overline{g(u)}du = \frac{\pi}{\sigma} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)\overline{g\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)}.$$

La dimostrazione formale del teorema è semplice: infatti, applicando alle funzioni  $f$  e  $g$  la formula (7.1) si ha (nel caso  $\sigma = \pi$ ):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\overline{g(u)}du = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(j)\overline{g(k)} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(u - j)\overline{\text{sinc}(u - k)}du.$$

Ora, ricordando l'esempio (9) della sezione 6.5, la famiglia di funzioni  $\{\text{sinc}(\cdot - k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$  è ortogonale, pertanto il secondo membro della precedente uguaglianza è dato da:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)\overline{g(k)},$$

e quindi si ha l'asserto. Naturalmente i passaggi descritti qui sono soltanto formali, occorre infatti giustificare le integrazioni per serie coinvolte. La prova rigorosa non è affatto semplice e si basa essenzialmente su un teorema di densità e su risultati di convergenza negli spazi  $L^2$  e  $\ell^2$ . Chi fosse interessato può consultare [3].

## 7.4 Il teorema di Heisenberg

In questa sezione supporremo sempre  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Un interessante risultato nell'ambito della teoria dei segnali è che un segnale  $f \in L^2(\mathbb{R})$  non può

essere simultaneamente “band-limited” e “time-limited”, cioè  $f$  o  $\hat{f}$  è a supporto compatto oppure lo è la sua trasformata, ad eccezione ovviamente del caso banale della funzione identicamente nulla. Infatti, se  $f$  (non identicamente nulla) è a banda limitata, allora il teorema di Paley-Wiener ci dice che  $f$  può essere estesa a tutto il campo complesso ad una funzione intera di tipo esponenziale. Pertanto, per il classico principio di identità delle funzioni analitiche, tale funzione non può avere supporto compatto, altrimenti sarebbe identicamente nulla. Viceversa, se  $f$  è a supporto compatto (cioè “time-limited”), contenuto in un intervallo  $[a, b]$ , considerando la trasformata di Fourier di  $f$  con variabile complessa  $z \in \mathbb{C}$ , si ha

$$F(z) \equiv \hat{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(x)e^{-izx} dx$$

e procedendo come nella dimostrazione della (b) del teorema di Paley-Wiener, si deduce che  $F$  è intera con derivata data da

$$F'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b (-ix)f(x)e^{izx} dx.$$

Pertanto la sua restrizione alla retta reale non può essere a supporto compatto. In altre parole, se  $f$  è a supporto compatto la sua trasformata  $\hat{f}$  può avere solo zeri isolati.

Questo fatto è un aspetto di un principio generale che dice che  $f$  e  $\hat{f}$  non possono essere entrambe precisamente localizzate. Cioè se  $f$  si annulla (oppure è “piccola”) fuori di un piccolo intervallo,  $\hat{f}$  deve essere in qualche modo molto “sparsa” e viceversa. Per ottenere un preciso risultato in questo senso, introduciamo la seguente definizione. Se  $a \in \mathbb{R}$  è un punto fissato, chiamiamo “dispersione di  $f$  intorno ad  $a$ ” il rapporto

$$\Delta_a f := \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 |f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx}, \quad (f \in L^2(\mathbb{R})).$$

Il numero  $\Delta_a f$  rappresenta una misura di quanto  $f$  si allontana dall’essere “concentrata” vicino al punto  $a$ . Se  $f$  è molto piccola fuori di un piccolo intorno di  $a$ , allora il fattore  $(x-a)^2$  renderà il numeratore della frazione piccolo rispetto al denominatore, mentre se  $f$  è significativa lontano dal punto  $a$ , lo stesso fattore renderà il numeratore “grande” rispetto al denominatore. Il seguente teorema ci dice che  $f$  e  $\hat{f}$  non possono essere entrambe concentrate vicino ad un singolo punto.

**Teorema 7 (Heisenberg)** Sia  $f \in C(\mathbb{R}) \cap W^{1,2}$  tale che  $(\cdot)f(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ . Allora, fissati  $a, \alpha \in \mathbb{R}$ , risulta

$$\Delta_a(f)\Delta_\alpha(\widehat{f}) \geq \frac{1}{4}.$$

**Dimostrazione.** Consideriamo prima il caso  $a = \alpha = 0$ . Se  $c < d$ , integrando per parti, si ha:

$$\int_c^d x \overline{f(x)} f'(x) dx = [x|f(x)|^2]_c^d - \int_c^d (|f(x)|^2 + x f(x) \overline{f'(x)}) dx,$$

da cui, posto  $g(x) = x f(x)$ ,

$$\begin{aligned} \int_c^d |f(x)|^2 dx &= -2\operatorname{Re} \int_c^d \overline{x f(x)} f'(x) dx + [x|f(x)|^2]_c^d \\ &= -2\operatorname{Re} \int_c^d \overline{g(x)} f'(x) dx + [x|f(x)|^2]_c^d. \end{aligned}$$

Poiché  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , passando al limite per  $c \rightarrow -\infty$  e  $d \rightarrow +\infty$  si ha  $c|f(c)|^2 \rightarrow 0$  e  $d|f(d)|^2 \rightarrow 0$ . Perciò otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = -2\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x f(x)} f'(x) dx.$$

Usando la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right)^2 \leq 4 \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx \right). \quad (7.3)$$

Usando ora la relazione di Parseval  $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$  si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}'(v)|^2 dv = \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 |\widehat{f}(v)|^2 dv.$$

Pertanto, la (7.3) può essere riscritta nella forma

$$\begin{aligned} &\left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(v)|^2 dv \right) \\ &\leq 4 \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 |f(v)|^2 dv \right), \end{aligned}$$

cioé l'asserto, nel caso  $a = \alpha = 0$ . Nel caso generale, dati  $a, \alpha$  poniamo

$$F(x) = e^{-i\alpha x} f(x + a).$$

Si vede facilmente che  $F$  soddisfa le ipotesi del teorema. Proviamo che  $\Delta_a f = \Delta_0 F$  e  $\Delta_\alpha \hat{f} = \Delta_0 \hat{F}$ . Infatti, con il cambiamento di variabile  $x + a = t$  si ha

$$\Delta_0 F = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |F(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^2 dx} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 |f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx} = \Delta_a f.$$

Per l'altra relazione, utilizzando le proprietà della trasformata di Fourier in relazione all'operatore di traslazione, si ha

$$\hat{F}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + a) e^{-i\alpha x} e^{-ivx} dx = e^{ia(v+\alpha)} \hat{f}(v + \alpha).$$

Da questo, operando un cambiamento di variabile, si ottiene subito  $\Delta_0 \hat{F} = \Delta_\alpha \hat{f}$ . Allora

$$(\Delta_a f)(\Delta_\alpha \hat{f}) = (\Delta_0 F)(\Delta_0 \hat{F}) \geq \frac{1}{4}.$$

Il teorema é cosí completamente provato.

Osserviamo che se  $g(\cdot) = (\cdot)f(\cdot) \notin L^2(\mathbb{R})$  allora  $\Delta_a f = +\infty$  e se  $f' \notin L^2(\mathbb{R})$  allora  $\Delta_\alpha \hat{f} = +\infty$  e quindi in questi casi la disuguaglianza di Heisenberg é banalmente verificata.

Ad illustrazione del teorema di Heisenberg, riprendiamo l'esempio (d) del paragrafo (5.2). Posto  $f(t) = e^{-at^2}$ ,  $a > 0$ , la trasformata di Fourier di  $f$  é data dalla

$$\hat{f}(v) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-v^2/4a}.$$

Pertanto se  $a$  é molto piccolo, la funzione  $f$  é "sparsa", mentre  $\hat{f}$  é localizzata intorno all'origine; se invece  $a$  é grande, allora ad essere localizzata é la funzione  $f$  e ad essere "sparsa" é la sua trasformata.

Nella meccanica quantistica, una particella, ad esempio un elettrone, che si muove lungo l'asse delle  $x$  é descritta da una "funzione d'onda"  $f(x)$ , che é rappresentata da una funzione a valori complessi in  $L^2(\mathbb{R})$  tale che  $\|f\|_2 = 1$ . In tal modo  $(\sqrt{2\pi})^{-1}|f(x)|^2$  é interpretata come la densità di probabilità

che la particella si trovi nella posizione  $x$ . L'integrale  $(\sqrt{2\pi})^{-1} \int_a^b |f(x)|^2 dx$  rappresenta invece la probabilità che la particella si trovi nell'intervallo  $[a, b]$ . La trasformata di Fourier della funzione d'onda  $f$  rappresenta la densità di probabilità per il momento della particella. Più precisamente, definiamo una versione lievemente modificata della trasformata di Fourier di  $f$ , che denoteremo con  $\tilde{f}$ , ponendo

$$\tilde{f}(v) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \hat{f}\left(\frac{v}{\hbar}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixv/\hbar} dx,$$

dove  $\hbar$  denota la costante di Planck (ridotta). Allora, usando l'equazione di Parseval per le trasformate di Fourier in  $L^2(\mathbb{R})$ , risulta  $\|\tilde{f}\|_2 = \|f\|_2 = 1$ . Quindi  $(\sqrt{2\pi})^{-1} |\tilde{f}(v)|^2$  può essere interpretata come la densità di probabilità per il momento della particella.

Così la disuguaglianza espressa dal teorema di Heisenberg fornisce una precisa formulazione del principio di incertezza posizione-momento. Con un semplice cambio di variabile si vede facilmente che  $\Delta_\alpha \tilde{f} = \hbar^2 \Delta_{\alpha/\hbar} \hat{f}$ , e quindi la disuguaglianza di Heisenberg si scrive nella forma

$$(\Delta_a f)(\Delta_\alpha \tilde{f}) \geq \frac{\hbar^2}{4}.$$

# Chapter 8

## Cenni sulla trasformata di Fourier in $\mathbb{R}^n$

### 8.1 Notazioni e definizioni preliminari

Denoteremo un punto di  $\mathbb{R}^n$  con il simbolo  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  e con  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  l'usuale prodotto scalare tra i vettori  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  e  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ , cioè

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

e il modulo di  $\mathbf{x}$  é definito da

$$|\mathbf{x}| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2} = \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2}.$$

L'integrale di una funzione misurabile  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  é definito dalla

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Le definizioni degli spazi  $L^p$ ,  $L^\infty$  e  $C(\mathbb{R}^n)$  sono essenzialmente le stesse di quelle introdotte nel caso unidimensionale. La norma dello spazio  $L^p$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , é definita dalla

$$\|f\|_p := \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right\}^{1/p} \quad (f \in L^p(\mathbb{R}^n)).$$



Date due funzioni  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  definiamo in modo analogo la convoluzione  $f * g$

$$(f * g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{u})g(\mathbf{u})d\mathbf{u},$$

e le proprietà elementari di tale prodotto sono praticamente le stesse di quelle viste nel Capitolo 2.

## 8.2 La trasformata di Fourier

Sia  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Definiamo la trasformata di Fourier di  $f$  ponendo per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\widehat{f}(\xi) = [f]^\wedge(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})e^{-i\xi \cdot \mathbf{x}}d\mathbf{x}.$$

La linearità dell'operatore  $\widehat{\cdot}$  segue subito dalla definizione. Inoltre la continuità e la limitatezza della funzione  $\widehat{f}$  si dimostrano nello stesso identico modo e inoltre si ottiene subito la stima

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|d\mathbf{x}.$$

Infine si ha anche che  $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ . Sussistono le seguenti proprietà elementari della trasformata di Fourier:

**Teorema 1** *Supponiamo che  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Valgono le proprietà:*

(i) *Per ogni vettore  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$*

$$(\mathcal{F}f(\cdot - \mathbf{a}))(\xi) = e^{-i\xi \cdot \mathbf{a}}\widehat{f}(\xi)$$

e

$$(\mathcal{F}e^{i(\cdot) \cdot \mathbf{a}}f(\cdot))(\xi) = \widehat{f}(\xi - \mathbf{a}).$$

(ii) *Se  $h > 0$ , posto  $f_h(\mathbf{x}) = h^{-n}f(h^{-1}\mathbf{x})$ , si ha*

$$\widehat{f}_h(\xi) = \widehat{f}(h\xi), \quad e \quad (\mathcal{F}f(h\cdot))(\xi) = (\widehat{f})_h(\xi).$$

(iii) *Se  $f$  è assolutamente continua rispetto ad  $x_j$ , con  $j = 1, 2, \dots, n$  e  $\partial f / \partial x_j$  e appartiene ad  $L^1(\mathbb{R}^n)$  allora risulta*

$$[\partial f / \partial x_j]^\wedge(\xi) = i\xi_j \widehat{f}(\xi).$$

(iv) Se  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  allora risulta:

$$(f * g)^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

**Dimostrazione** Le dimostrazioni sono del tutto analoghe a quelle del caso unidimensionale. Proviamo ad esempio la prima delle (ii) e la (iii). Per la (ii), facendo il cambiamento di variabili  $h^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{v}$  e tenendo conto che lo Jacobiano é uguale a  $h^n$ , si ha:

$$(2\pi)^{n/2}\widehat{f}_h(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} h^{-n} f(h^{-1}\mathbf{x}) e^{-i\xi \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{v}) e^{-i\xi \cdot h\mathbf{v}} d\mathbf{v} = (2\pi)^{n/2}\widehat{f}(h\xi).$$

Per la (iii) scriviamo

$$\begin{aligned} (2\pi)^{n/2}[\partial f / \partial x_j]^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) e^{-i\xi \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{k=1, k \neq j}^n e^{-\xi_k x_k} dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) e^{-i\xi_j x_j} dx_j, \end{aligned}$$

e il risultato segue subito utilizzando una integrazione per parti sull'integrale interno, come nel caso unidimensionale.

La (iii) del Teorema 1 si estende ovviamente anche alle derivate di ordine superiore, ammesso che queste derivate appartengano ad  $L^1(\mathbb{R})$ . Determiniamo ad esempio la trasformata di Fourier di una derivata seconda mista:

$$\left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right]^\wedge(\xi) = i\xi_k \left[ \frac{\partial f}{\partial x_j} \right]^\wedge(\xi) = -\xi_k \xi_j \widehat{f}(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

In particolare la trasformata del Laplaciano di una funzione  $f \in C^2(\mathbb{R})$  é data dalla formula

$$[\Delta f]^\wedge(\xi) = -|\xi|^2 \widehat{f}(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

Un caso particolarmente interessante é quello delle funzioni "box", cioè funzioni di  $n$  variabili del tipo  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2) \dots f_n(x_n)$ . In tal caso, siccome si ha ovviamente  $e^{-i\xi \cdot \mathbf{x}} = (e^{-i\xi_1 x_1})(e^{-i\xi_2 x_2}) \dots (e^{-i\xi_n x_n})$ , risulta

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}_1(\xi_1)\widehat{f}_2(\xi_2) \dots \widehat{f}_n(\xi_n). \quad (8.1)$$

Un esempio importante é la funzione gaussiana definita dalla ( $a > 0$ )

$$G(\mathbf{x}) = e^{-a|\mathbf{x}|^2/2}$$

che é il prodotto delle funzioni  $f_j(x_j) = e^{-ax_j^2/2}$ . In particolare, tenendo conto dell'esempio (d) del paragrafo 5.2, si ha:

$$\widehat{G}(\xi) = \left(\frac{1}{a}\right)^{n/2} e^{-|\xi|^2/(2a)}.$$

Per quanto riguarda la formula di inversione, ci limitiamo al seguente risultato che é l'analogo del teorema 11 del Capitolo 5.

**Teorema 2** *Se  $f$  e  $\widehat{f}$  appartengono a  $L^1(\mathbb{R}^n)$  allora risulta:*

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot \mathbf{x}} \widehat{f}(\xi) d\xi,$$

*quasi ovunque in  $\mathbb{R}^n$ . Se poi la funzione  $f$  é anche continua, la formula vale per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .*

Con lo stesso approccio utilizzato nel caso unidimensionale, si puó poi definire la trasformata di Fourier per funzioni  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $1 < p \leq 2$ , attraverso un processo di limite che coinvolge la trasformata di Fourier delle funzioni troncate:

$$f_\rho(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\chi_{B_\rho}(\mathbf{x}),$$

dove  $B_\rho := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < \rho\}$ . In particolare per funzioni  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  la trasformata di Fourier é definita attraverso la formula

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\| \widehat{f}(\cdot) - \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{B_\rho} f(\mathbf{x}) e^{-i(\cdot) \cdot \xi} d\mathbf{x} \right\|_2 = 0.$$

Come nel caso unidimensionale sussiste l'uguaglianza

$$\|\widehat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2$$

e il conseguente teorema di Plancherel, con la formula di inversione in  $L^2(\mathbb{R})$

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\| f(\cdot) - \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{B_\rho} \widehat{f}(\xi) e^{i(\cdot) \cdot \xi} d\xi \right\|_2 = 0.$$

### 8.3 Applicazioni alle equazioni differenziali

Come accade nel caso unidimensionale, usando ripetutamente il Teorema 1 (iii), la trasformata di Fourier trasforma un operatore differenziale lineare  $L$  a coefficienti costanti in una moltiplicazione per un polinomio. Ad esempio, se

$$L[u] = au + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k},$$

allora

$$(L[u])^\wedge(\xi) = P(\xi)\hat{u}(\xi)$$

dove

$$P(\xi) = a + i \sum_{j=1}^n b_j \xi_j - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} \xi_j \xi_k.$$

Pertanto, formalmente, possiamo risolvere una equazione del tipo  $L[u] = f$  su  $\mathbb{R}^n$  prendendo  $\hat{u} = \hat{f}/P$  e successivamente utilizzare, se possibile, la formula di inversione per ottenere la soluzione  $u$ , cioè

$$u(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} e^{i\xi \cdot \mathbf{x}} d\xi.$$

Se  $K$  é la trasformata inversa di  $1/P$  utilizzando il teorema di convoluzione ((iv) del Teorema 1), si può scrivere la soluzione  $u$  come prodotto di convoluzione  $u = f * K$ . Naturalmente, perché tutto funzioni occorrerà imporre delle condizioni “a priori” sulla funzione  $u$ .

#### Esempi

(a) Risolviamo l’equazione del calore in  $\mathbb{R}^n$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n).$$

Se assumiamo a priori che  $u \in C^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$  e tutte le derivate coinvolte appartengano ancora ad  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , possiamo applicare la trasformata di Fourier rispetto ad  $\mathbf{x}$  ottenendo l’equazione (si veda il caso unidimensionale)

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi, t) = -|\xi|^2 \hat{u}(\xi, t).$$

Procedendo come nel caso unidimensionale si ottiene la soluzione  $u$  nella forma

$$u(\mathbf{x}, t) = (f * K_t)(\mathbf{x}, t), \quad K_t(\mathbf{x}) = (2t)^{-n/2} e^{-|\mathbf{x}|^2/4t}.$$

(b) Consideriamo l'equazione delle onde con  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $t \geq 0$ ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \quad u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0.$$

Assumendo ancora a priori che  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$  e che tutte le funzioni coinvolte e le loro derivate siano in  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , applicando la trasformata di Fourier rispetto ad  $\mathbf{x}$ , otteniamo l'equazione ordinaria, per ogni fissato  $\xi$ ,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \widehat{u}(\xi, t) + |\xi|^2 \widehat{u}(\xi, t) = 0,$$

con le condizioni iniziali

$$\widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi), \quad \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(\xi, 0) = 0.$$

La soluzione di questo problema é quindi data dalla  $\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) \cos(t|\xi|)$ . Se  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$  utilizzando il Teorema 2 otteniamo la soluzione del problema originale

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \cos(t|\xi|) e^{i\xi \cdot \mathbf{x}} d\xi,$$

per  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $t \geq 0$ .

(c) *Potenziali di Bessel*. Per  $n \leq 3$  Consideriamo l'equazione

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n,$$

dove  $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ . Applicando la trasformata di Fourier in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  utilizzando il Teorema 1 (iii), si ha

$$(1 + |\xi|^2) \widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

che é un'equazione algebrica dalla quale si ricava

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{1 + |\xi|^2} \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

Pertanto, antitrasformando, otteniamo

$$u(\mathbf{x}) = (f * B)(\xi)$$

dove la funzione  $B$  ha trasformata

$$\widehat{B}(\xi) = \frac{1}{1 + |\xi|^2} \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

Determiniamo ora la funzione  $B$ . Intanto é facile vedere che

$$\frac{1}{1 + |\xi|^2} = \int_0^\infty e^{-t(1+|\xi|^2)} dt.$$

Quindi

$$B(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^\infty e^{-t} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{x} \cdot \xi - t|\xi|^2} d\xi \right) dt.$$

Valutiamo l'integrale interno. Ricordando ora il calcolo eseguito nell'esempio (d) del paragrafo 5.2, si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - t|\xi|^2} d\xi = \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_j \xi_j - t\xi_j^2} d\xi_j = \left( \frac{\pi}{t} \right)^{n/2} \exp \left( - \frac{|\mathbf{x}|^2}{4t} \right).$$

Di conseguenza, otteniamo

$$B(\mathbf{x}) = \frac{1}{2^{n/2}} \int_0^\infty \frac{\exp \left( - t - \frac{|\mathbf{x}|^2}{4t} \right)}{t^{n/2}} dt \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n).$$

La funzione  $B$  é chiamata un *potenziale di Bessel*. La soluzione  $u$  assume allora la forma

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp \left( - t - \frac{|\mathbf{x} - \xi|^2}{4t} \right)}{t^{n/2}} f(\xi) d\xi dt \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n).$$

## 8.4 Il teorema del campionamento in $\mathbb{R}^n$ .

Il teorema del campionamento si estende in modo naturale al caso delle funzioni  $f$  definite in uno spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ . Una versione generale del teorema di Paley-Wiener in  $\mathbb{R}^n$  si trova per esempio nel volume [14] e coinvolge le funzioni di piú variabili complesse. Pertanto qui enunceremo il teorema di campionamento assumendo direttamente che la funzione  $f$  appartenga alla classe di Paley-Wiener nel caso multidimensionale. Premettiamo

quindi qualche notazione e definizione. Con  $\mathbf{Z}^n$  denotiamo l'insieme di tutte le  $n$ -uple  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$  di interi  $k_j \in \mathbf{Z}$ . Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , denotiamo con  $\mathbf{uv}$  il vettore  $(u_1v_1, \dots, u_nv_n)$  e con  $\mathbf{u}/\mathbf{v}$  il vettore  $(u_1/v_1, \dots, u_n/v_n)$ . Se  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ , con  $r_j > 0$ , per ogni  $j = 1, \dots, n$ , definiamo la classe di Paley-Wiener  $\widehat{\mathbf{B}}_{\mathbf{r}}^2$  come lo spazio comprendente tutte le funzioni  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  tali che  $f \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  e  $\widehat{f}(\mathbf{v}) = 0$  quasi ovunque per  $\mathbf{v} \notin \mathbf{Q}_{\mathbf{r}} := \prod_{j=1}^n [-r_j, r_j]$ . Sussiste il seguente

**Teorema 3** *Se  $f \in \widehat{\mathbf{B}}_{\mathbf{r}}^2$ , allora per ogni  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  si ha*

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} f\left(\pi \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{r}}\right) \prod_{j=1}^n \operatorname{sinc}\left(\frac{r_j x_j}{\pi} - k_j\right), \quad (8.2)$$

e la serie converge assolutamente ed uniformemente sui compatti di  $\mathbb{R}^n$ .

La formula (8.2) può essere estesa al caso in cui  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  sia sostituito da  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  (lo spazio costituito dalle  $n$ -uple di numeri complessi  $(z_1, \dots, z_n)$ ). La funzione

$$\operatorname{sinc}(\mathbf{u}) = \prod_{j=1}^n \operatorname{sinc}(u_j) \quad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n),$$

è data come prodotto "box" delle funzioni  $\operatorname{sinc}(u_j)$  e pertanto dalla (8.1) si ha:

$$\operatorname{sinc}(\mathbf{u}) = \prod_{j=1}^n \operatorname{sinc}(u_j) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \prod_{j=1}^n \widehat{\chi_{[-\pi, \pi]}}(u_j).$$

Come nel caso unidimensionale, il teorema di campionamento ha numerose conseguenze. Illustriamo qui per esempio, la "reproducing kernel formula" nel caso multidimensionale. Sussiste il seguente:

**Teorema 4** *Se  $f \in \widehat{\mathbf{B}}_{\mathbf{r}}^2$ , allora risulta*

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^n} \left( \prod_{j=1}^n r_j \right) \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u}) \prod_{j=1}^n \operatorname{sinc}\left(\frac{r_j}{\pi}(x_j - u_j)\right) d\mathbf{u} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n).$$

**Dimostrazione.** Poniamo per semplicità  $r_j = \pi$  per ogni  $j = 1, \dots, n$ . Posto per  $\mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ ,  $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{u})$  e procedendo esattamente come nel

caso unidimensionale si ha:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}} f(\mathbf{u} + \mathbf{k}) \prod_{j=1}^n \text{sinc}(x_j - u_j - k_j),$$

e quindi integrando in  $d\mathbf{u}$  sul cubo  $A = [0, 1]^n$  si ha

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} \int_{[0,1]^n} f(\mathbf{u} + \mathbf{k}) \prod_{j=1}^n \text{sinc}(x_j - u_j - k_j) d\mathbf{u} \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} \int_{\prod_{j=1}^n [k_j, k_j+1]} f(\mathbf{v}) \prod_{j=1}^n \text{sinc}(x_j - v_j) d\mathbf{v} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{v}) \prod_{j=1}^n \text{sinc}(x_j - v_j) d\mathbf{v} \end{aligned}$$

cioé l'asserto nel caso  $r_j = \pi$ . Nel caso generale si procede come già visto in  $\mathbb{R}$ .

La formula precedente sussiste anche per  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ .

Analogamente sussiste una versione multidimensionale della formula di decomposizione di Parseval.



## Chapter 9

# Distribuzioni temperate

In questo capitolo accenneremo brevemente alla teoria delle distribuzioni temperate e la loro trasformata di Fourier. Questo approccio consente di definire la trasformata di Fourier per funzioni in  $L^p(\mathbb{R})$  con  $p > 2$ .

La teoria delle distribuzioni nasce dall'esigenza di descrivere matematicamente certe situazioni che appaiono frequentemente nelle applicazioni fisiche e che non possono essere modellizzate da funzioni ordinarie. I fisici hanno spesso considerato situazioni nelle quali qualche grandezza fisica assume un grande valore in un piccolo intervallo di tempo. Ad esempio nella teoria dell'elettricità un elettrone é considerato come una "carica puntuale", cioè esiste un certa quantità di carica elettrica localizzata in un punto dello spazio. La densità di carica é infinita in questo punto ma la carica stessa ha un valore finito. Per descrivere questa situazione, i fisici hanno pensato di introdurre una "funzione" denotata  $\delta(t)$  con le seguenti proprietà:

(1)  $\delta(t) = 0$  for  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(2)  $\delta(0) = +\infty$

(3)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ .

Ovviamente non esiste alcuna funzione ordinaria che soddisfa simultaneamente le tre condizioni sopra elencate. Cambiando il punto di vista, si può pensare ad una funzione non come una legge che associa ad ogni singolo punto una valore preciso, ma come una legge che assegna un valore in certi "fuzzy points", cioè viene assegnato un "valore medio" della funzione in intervalli di lunghezza positiva. Questo sarà fatto introducendo la classe delle funzioni "test" che sono alla base della definizione di distribuzione.

## 9.1 Classi di funzioni test

Una funzione "test" é una funzione  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{C}$  di classe  $C^\infty(\mathbb{R})$  cioè infinitamente differenziabile. Utilizzeremo una notazione concisa per questa classe, cioè porremo  $\mathcal{E} = C^\infty(\mathbb{R})$ .

Il supporto di una funzione  $\varphi \in \mathcal{E}$  é definito dalla:

$$\text{supp}\varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Quindi un punto  $x \in \mathbb{R}$  appartiene al supporto di  $\varphi$  se ogni intorno di  $x$  contiene punti  $y$  tali che  $\varphi(y) \neq 0$ ; invece il fatto che  $x \notin \text{supp}\varphi$  significa che  $\varphi(y) = 0$  per tutti i punti  $y$  appartenenti ad un opportuno intorno di  $x$ .

Facciamo alcuni esempi. La funzione  $\varphi(x) = 1 - x^2$  per  $|x| < 1$  e  $\varphi(x) = 0$  per  $|x| \geq 1$  ha come supporto l'intervallo  $[-1, 1]$ . La funzione  $\psi(x) = \sin x$  per  $|x| < \pi$  e  $\psi(x) = 0$  per  $|x| \geq \pi$  ha come supporto l'intervallo  $[-\pi, \pi]$ . Sebbene  $\psi(0) = 0$ , il punto  $x = 0$  appartiene al supporto perché ogni intorno di  $x = 0$  contiene punti  $y$  in cui  $\psi(y) \neq 0$ .

Il supporto di una funzione é sempre un insieme chiuso. Una funzione  $\varphi$  a supporto compatto é una funzione tale che  $\varphi(x) = 0$  al di fuori di un intervallo compatto. L'insieme delle funzioni test a supporto compatto é denotato con  $\mathcal{D}$ . L'insieme  $\mathcal{D}$  contiene infinite funzioni. Un esempio é il seguente: definiamo prima la funzione

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-1/x}, & x > 0 \end{cases}$$

É un facile esercizio dimostrare che questa funzione é un elemento di  $\mathcal{E}$  e le derivate nell'origine sono tutte nulle. Ora definiamo la funzione  $\psi(x) = \varphi(x)\varphi(1-x)$ . Ovviamente  $\psi \in \mathcal{E}$  e il suo supporto é l'intervallo  $[0, 1]$ . Pertanto  $\psi \in \mathcal{D}$ . Posto  $B := \int_0^1 \psi(t)dt$ , la funzione  $\psi/B$  puó essere interpretata come un "fuzzy point" intorno al punto  $x = 1/2$ . Posto  $\psi_n(x) := n\psi(nx - 1/2)/B$  otteniamo una funzione che al crescere di  $n$  tende a concentrare i suoi valori in un singolo punto (l'origine). In altri termini la funzione diventa sempre meno "fuzzy" al crescere di  $n$ .

Come vedremo in seguito, per le esigenze dell'Analisi di Fourier la classe delle funzioni test  $\mathcal{D}$  non é del tutto adeguata. Introduciamo ora una classe piú ampia di funzioni test, nota come la classe di Schwartz, che denotiamo

con  $\mathcal{S}$ . Una funzione test  $\varphi$  appartiene alla classe  $\mathcal{S}$  se  $\varphi$  ha le derivate di tutti gli ordini che soddisfano le disuguaglianze

$$(1 + |x|)^n |\varphi^{(k)}(x)| \leq C_{n,k}, \quad x \in \mathbb{R},$$

dove  $C_{n,k}$  sono costanti, per tutti gli interi non negativi  $n, k$ .

Dalla definizione segue subito che una funzione  $\varphi \in \mathcal{S}$  tende a 0 per  $x \rightarrow \pm\infty$ , insieme a tutte le derivate, piú velocemente del reciproco di ogni polinomio. In particolare, si ha ovviamente  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ . L'inclusione é propria, infatti ad esempio la funzione  $\varphi(x) = e^{-x^2}$  appartiene a  $\mathcal{S}$  ma non ha supporto compatto.

Nella definizione di distribuzione che introdurremo nella sezione seguente, avremo la necessitá di introdurre la classe delle funzioni "moderatamente crescenti" o "temperate" che comprende tutte le funzioni  $\chi$  per le quali esistono una costante  $C > 0$  e un intero positivo  $m$  tali che

$$|\chi(x)| \leq C(1 + |x|)^m, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se  $\chi \in \mathcal{E}$  é moderatamente crescente e tutte le sue derivate sono temperate, allora diremo che  $\chi$  é un "moltiplicatore". Se  $\chi$  é un moltiplicatore, per ogni  $\varphi \in \mathcal{S}$  la funzione  $\chi\varphi$  appartiene ancora ad  $\mathcal{S}$ .

Gli spazi  $\mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{S}$  sono tutti spazi vettoriali di dimensione infinita. Dobbiamo introdurre una nozione di convergenza per tali spazi. Questo lo faremo per lo spazio che maggiormente ci interessa, cioé lo spazio  $\mathcal{S}$ .

Una successione  $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{S}$  converge in  $\mathcal{S}$  ad una funzione  $\psi \in \mathcal{S}$ , se per tutti gli interi non negativi  $n, k$  si ha

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \max_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^n |\varphi_j^{(k)}(x) - \psi^{(k)}(x)| = 0.$$

Denoteremo questo scrivendo  $\varphi_j \rightarrow \psi(\mathcal{S})$  per  $j \rightarrow +\infty$ .

La nozione di convergenza ci dice quindi che  $\varphi_j \rightarrow \psi(\mathcal{S})$  se e solo se le funzioni  $\varphi_j$  e tutte le loro derivate convergono a  $\psi$  e alle rispettive derivate uniformemente anche dopo la moltiplicazione per un arbitrario polinomio in  $x$ .

## 9.2 Distribuzioni temperate

Una "distribuzione" é un'applicazione che assegna ad ogni funzione test in qualche spazio un numero complesso. Se  $f$  é una distribuzione il valore di

$f$  sulla funzione test  $\varphi$  sarà denotato con  $f[\varphi]$ . A seconda di quale spazio di funzioni test si adopera, si ottengono differenti classi di distribuzioni. Nel contesto dell'Analisi di Fourier, la classe piú adatta risulta essere lo spazio di Schwartz  $\mathcal{S}$ . Una tale distribuzione si chiama "distribuzione temperata". Introduciamo ora la definizione rigorosa di distribuzione temperata. Una distribuzione temperata  $f$  é un'applicazione  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{C}$  con le seguenti proprietá:

- (1)  $f$  é lineare, cioè  $f[c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2] = c_1f[\varphi_1] + c_2f[\varphi_2]$  per ogni  $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$  e  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}$ .
- (2)  $f$  é continua cioè se  $\varphi_j \rightarrow \psi$  in  $\mathcal{S}$  per  $j \rightarrow +\infty$  allora

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} f[\varphi_j] = f[\psi].$$

La classe delle distribuzioni temperate é indicata con il simbolo  $\mathcal{S}'$ .

Introduciamo ora esempi significativi di distribuzioni temperate.

- (a) Sia  $f$  una funzione localmente integrabile su  $\mathbb{R}$  che sia temperata, nel senso che esistono una costante  $M > 0$  e un intero non negativo  $m$  tali che  $|f(x)| \leq M(1 + |x|)^m$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Possiamo allora definire la distribuzione temperata

$$T_f[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

É chiaro che  $T_f$  é lineare. Proviamo ora la continuitá in  $\mathcal{S}$ . Sia  $(\varphi_j)$  una successione in  $\mathcal{S}$  che converge a  $\psi \in \mathcal{S}$ . Allora si ha

$$\begin{aligned} |T_f[\varphi_j] - T_f[\psi]| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\varphi_j(x) - \psi(x))dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} M(1 + |x|)^m |\varphi_j(x) - \psi(x)| dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} M(1 + |x|)^{m+2} |\varphi_j(x) - \psi(x)| \frac{dx}{(1 + |x|)^2} \\ &= M \max_{x \in \mathbb{R}} \{(1 + |x|)^{m+2} |\varphi_j(x) - \psi(x)|\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + |x|)^2}, \end{aligned}$$

e l'ultimo termine tende a 0 per  $j \rightarrow +\infty$ . Pertanto  $T_f$  è continua e quindi è una distribuzione temperata. In tal caso identifichiamo la distribuzione  $T_f$  con la funzione ordinaria  $f$ . In tal senso le distribuzioni costituiscono una estensione del concetto di funzione. Queste distribuzioni vengono anche dette "regolari".

- (b) Indichiamo con  $H(x)$  la funzione di Heaviside definita dalla  $H(x) = 0$  se  $x < 0$  e  $H(x) = 1$  se  $x > 0$ . Questa funzione definisce una distribuzione regolare attraverso la formula

$$H[\varphi] = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx.$$

- (c) Definiamo la distribuzione  $\delta[\varphi] = \varphi(0)$ . Questa è detta la distribuzione "Delta" di Dirac e modella le situazioni fisiche descritte all'inizio di questo capitolo. Essa non è regolare nel senso dell'esempio (a). Un modo alternativo di definire la distribuzione  $\delta$  è quello di considerare la successione di funzioni

$$K_n(t) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-n^2 t^2 / 2} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Al limite per  $n \rightarrow +\infty$  la funzione possiede il limite

$$K(t) = 0 \text{ se } t \neq 0, \quad K(t) = +\infty, \text{ se } t = 0,$$

che è la "funzione"  $\delta$  di Dirac. Le funzioni  $K_n$  appartengono tutte allo spazio  $\mathcal{S}$  e fungono da "fuzzy points" sui quali definire una distribuzione.

- (d) La funzione  $f(x) = 1/x$  non può essere utilizzata come distribuzione regolare (esempio (a)) perché non è localmente integrabile in  $\mathbb{R}$ . Tuttavia è possibile definire una distribuzione temperata ponendo per ogni  $\varphi \in \mathcal{S}$ ,

$$f[\varphi] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx.$$

Tale distribuzione si denota con  $P.V.1/x$  dove P.V. indica l'integrale "valore principale" della funzione  $1/x$ .

- (e) La funzione  $f(x) = e^{x^2}$  non descrive una distribuzione temperata regolare (esempio (a)). Infatti se scegliamo la funzione  $\varphi(x) = e^{-x^2}$  si ha  $\varphi \in \mathcal{S}$ , ma la funzione  $f(x)\varphi(x) = 1$  ha integrale divergente.

In generale, osserviamo che se  $f$  é un'arbitraria distribuzione, non esiste un valore di  $f$  in un punto  $x$ , come avviene per le funzioni ordinarie. Tuttavia in termini puramente simbolici spesso si scrive l'azione di  $f$  su una funzione test come un integrale del tipo:

$$f[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

Riferendoci alla distribuzione di Dirac, si puó per esempio scrivere (simbolicamente)

$$\delta[\varphi] = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx.$$

Se formalmente ora trasliamo la "funzione"  $\delta$  otteniamo con un cambiamento di variabile

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)\varphi(y+a)dy = [\varphi(y+a)]_{y=0} = \varphi(a).$$

Ponendo quindi  $\delta_a(x) = \delta(x-a)$  si ottiene la distribuzione  $\delta_a[\varphi] = \varphi(a)$ .

Introduciamo ora alcune proprietá delle distribuzioni temperate.

Due distribuzioni  $f, g$  si dicono "uguali" se  $f[\varphi] = g[\varphi]$  per ogni  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Inoltre per  $f, g \in \mathcal{S}'$  definiamo le operazioni di somma e di moltiplicazione per scalari ponendo:

1. somma:  $(f+g)[\varphi] = f[\varphi] + g[\varphi]$ , per ogni  $\varphi \in \mathcal{S}$ ,
2. moltiplicazione per scalari: se  $c \in \mathbf{C}$  e  $f \in \mathcal{S}'$  definiamo  $(c \cdot f)[\varphi] = cf[\varphi]$ , per ogni  $\varphi \in \mathcal{S}$ .

Con le operazioni introdotte, lo spazio delle distribuzioni temperate  $\mathcal{S}'$  diventa uno spazio vettoriale.

Una distribuzione temperata  $f$  é "zero su un intervallo aperto  $I = ]a, b[$ ", se  $f[\varphi] = 0$  per tutte le funzioni  $\varphi \in \mathcal{S}$  che hanno supporto contenuto in  $I$ . Cosí, due distribuzioni  $f, g$  sono uguali su un intervallo aperto  $I$  se  $f-g$  é zero su  $I$ . Per esempio  $\delta = 0$  sull'intervallo  $]0, +\infty[$ . Introduciamo ora il

supporto di una distribuzione  $f$ , denotato con  $\text{supp} f$ . Esso é definito come l'insieme dei punti  $x \in \mathbb{R}$  per i quali esiste un intorno  $I$  sul quale  $f[\varphi] \neq 0$ , per ogni  $\varphi \in \mathcal{S}$  con supporto in  $I$ . Cosí un punto  $x$  non appartiene al supporto di  $f$  se esiste un intorno (aperto) di  $x$  dove  $f$  é zero. Il supporto é sempre un insieme chiuso.

Facciamo qualche esempio.

- (i) Per una distribuzione regolare (esempio (a)) il supporto di  $f$  come distribuzione coincide col supporto di  $f$  come funzione.
- (ii) Il supporto della distribuzione di Heaviside  $H$  é l'intervallo  $[0, +\infty[$ ; il supporto della distribuzione  $\delta$  di Dirac é il singleton  $\{0\}$ . Più in generale il supporto di  $\delta_a$  é  $\{a\}$ .

Se  $\chi \in \mathcal{E}$  é un moltiplicatore (vedi Sez. 9.1) e  $f \in \mathcal{S}'$  allora il prodotto  $\chi f$  é definito dalla  $(\chi f)[\varphi] = f[\chi\varphi]$ , per ogni  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Ad esempio, determiniamo il prodotto  $\chi\delta$ . Si ha dalla definizione:

$$(\chi\delta)[\varphi] = \delta[\chi\varphi] = \chi(0)\varphi(0) = \chi(0)\delta[\varphi].$$

Questo risultato é spesso scritto simbolicamente trattando  $\delta$  come una "funzione" nella forma:

$$\chi(x)\delta(x) = \chi(0)\delta(x).$$

Piú in generale si ha  $\chi(x)\delta(x-a) = \chi(a)\delta(x-a)$ , per  $a \in \mathbb{R}$ .

Un altro esempio interessante: prendiamo la funzione  $\chi(x) = x$  e la distribuzione  $f = P.V.1/x$ . Calcoliamo il prodotto  $\chi f$ . Si ha:

$$\begin{aligned} \chi f[\varphi] &= f[\chi\varphi] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Pertanto la distribuzione  $\chi f$  può essere identificata con la funzione costante  $f(x) = 1$ , cioè  $x \cdot P.V.1/x = 1$ .

### 9.3 Derivata di una distribuzione

Il punto di partenza é la classica formula di integrazione per parti,

$$\int_a^b f'(x)\varphi(x) dx = f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a) - \int_a^b f(x)\varphi'(x) dx.$$

Se  $f$  è una funzione di classe  $C^1$  moderatamente crescente e se  $\varphi \in \mathcal{S}$ , facendo il limite nella precedente relazione per  $a \rightarrow -\infty$  e  $b \rightarrow +\infty$  otteniamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx.$$

Questa relazione suggerisce la seguente definizione di derivata di una distribuzione temperata. Se  $f \in \mathcal{S}'$  definiamo una nuova distribuzione, denotata con  $f'$  con la formula

$$f'[\varphi] = -f[\varphi'] \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Chiamiamo  $f'$  la derivata di  $f$ . Si noti che se  $\varphi \in \mathcal{S}$  allora ovviamente  $\varphi' \in \mathcal{S}$ . È facile mostrare che  $f' \in \mathcal{S}'$ . Osserviamo che se  $f \in C^1(\mathbb{R})$  allora la derivata ordinaria di  $f$  è identificata con la nuova derivata di  $f$  intesa come distribuzione. Ma ciò che qui è importante è che ogni distribuzione possiede una derivata! Iterando la definizione di derivata, si ottengono le definizioni di derivata di ordine superiore e ciò che si deduce è che ogni distribuzione possiede le derivate di tutti gli ordini!

Facciamo alcuni esempi.

(a) Determiniamo la derivata della funzione di Heaviside. Si ha per definizione:

$$\begin{aligned} H'[\varphi] &= -H[\varphi'] = - \int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = -[\varphi(x)]_0^{\infty} \\ &= \varphi(0) = \delta[\varphi], \end{aligned}$$

per ogni  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Quindi risulta  $H' = \delta$ , cioè la derivata della distribuzione di Heaviside è la distribuzione  $\delta$ .

(b) Determiniamo ora la derivata della distribuzione  $\delta$ . Si ha:

$$\delta'[\varphi] = -\delta[\varphi'] = -\varphi'(0),$$

cioè  $H''[\varphi] = \varphi'(0)$ . In generale si ha  $\delta^{(n)}[\varphi] = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$ .

(c) Troviamo la derivata di  $\chi f$  con  $\chi \in \mathcal{E}$  un moltiplicatore e  $f \in \mathcal{S}'$ . Si ha:

$$(\chi f)'[\varphi] = -(\chi f)[\varphi'] = -f[\chi\varphi'],$$



e d'altra parte si ha anche

$$\begin{aligned} (\chi'f + \chi f')[\varphi] &= (\chi'f)[\varphi] + (\chi f')[\varphi] = f[\chi'\varphi] + f'[\chi\varphi] \\ &= f[\chi'\varphi] - f[(\chi\varphi)'] = f[\chi'\varphi] - f[\chi'\varphi + \chi\varphi'] = -f[\chi\varphi'] \end{aligned}$$

e quindi si ottiene

$$(\chi f)' = \chi'f + \chi f'$$

per ogni  $f \in \mathcal{S}'$  e per ogni moltiplicatore  $\chi \in \mathcal{E}$ .

- (d) La funzione  $f(x) = |x^2 - 1|$  può essere scritta in termini della funzione di Heaviside nel modo seguente:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 1)H(x - 1) + (1 - x^2)(H(x + 1) - H(x - 1)) \\ &+ (x^2 - 1)(1 - H(x + 1)) \\ &= (x^2 - 1)(2H(x - 1) - 2H(x + 1) + 1). \end{aligned}$$

Determiniamo la derivata di  $f$  usando le comuni regole di differenziazione di un prodotto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x((2H(x - 1) - 2H(x + 1) + 1) \\ &+ (x^2 - 1)(2\delta(x - 1) - 2\delta(x + 1))) \\ &= 2x(2H(x - 1) - 2H(x + 1) + 1), \\ f''(x) &= 4H(x - 1) - 4H(x + 1) + 2 + 4\delta(x - 1) + 4\delta(x + 1). \end{aligned}$$

ove abbiamo utilizzato la formula  $\chi(x)\delta(x - a) = \chi(a)\delta(x - a)$ . La funzione  $f$  ha derivata ordinaria in ogni punto ( $2x$ , se  $|x| > 1$  e  $-2x$ , se  $|x| < 1$ ) ad eccezione dei punti  $x = \pm 1$ . In presenza di questi punti appaiono le distribuzioni  $\delta$  nella derivata seconda.

- (e) Siano  $a > 0$  e  $b$  costanti reali. Se  $f \in \mathcal{S}'$  definiamo  $g$  ponendo  $g(x) = f(ax + b)$ . Questo significa (simbolicamente) che

$$g[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax + b)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi\left(\frac{y - b}{a}\right)\frac{dy}{a}$$

cioé

$$g[\varphi] = \frac{1}{a}f[\psi],$$

dove  $\psi(x) = \varphi((x - b)/a)$ . Quali legami ci sono tra le derivate di  $f$  e  $g$ ? Si ha:

$$g'[\varphi] = -g[\varphi'] = -\int_{-\infty}^{\infty} f(ax + b)\varphi'(x)dx,$$

cioé

$$g'[\varphi] = -\frac{1}{a}f[\varphi'((\cdot - b)/a)].$$

Ora determiniamo l'azione della distribuzione scritta simbolicamente  $h(x) = af'(ax + b)$ . Si ha, usando lo stesso cambiamento di variabile di prima,

$$\begin{aligned} h[\varphi] &= a \int_{-\infty}^{\infty} f'(ax + b)\varphi(x)dx = a \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi\left(\frac{x - b}{a}\right)\frac{dx}{a} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi\left(\frac{x - b}{a}\right)dx \end{aligned}$$

e pertanto

$$h[\varphi] = f'[\varphi((\cdot - b)/a)].$$

Usando la definizione di derivata  $f'$ , si ottiene

$$h[\varphi] = -f[(1/a)\varphi'((\cdot - b)/a)] = -\frac{1}{a}f[\varphi'((\cdot - b)/a)],$$

cioé  $h[\varphi] = g'[\varphi]$ , per ogni  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Se si procede simbolicamente, si ha

$$h[\varphi] = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'\left(\frac{x - b}{a}\right)dx,$$

e ancora utilizzando un cambiamento di variabile

$$h[\varphi] = -\int_{-\infty}^{\infty} f(ax + b)\varphi'(x)dx,$$

cioé  $g'(x) = af'(ax + b)$ .

Usando la nuova nozione di derivata (la derivata distribuzionale che può essere associata ad ogni funzione localmente integrabile e moderatamente crescente), l'equazione delle onde, che abbiamo studiato nel Capitolo 4

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

nella quale prendiamo derivate distribuzionali, possiede una classe molto piú ampia di soluzioni del tipo

$$F(x+t) + G(x-t),$$

qualunque siano le funzioni  $F, G$  moderatamente crescenti.

Formuliamo ora un risultato fondamentale.

**Teorema 1** *Se  $f \in \mathcal{S}'$ , allora  $f' = 0$  se e solo se  $f$  é un'ordinaria funzione costante.*

**Dimostrazione.** Premettiamo la seguente osservazione: una funzione  $\varphi \in \mathcal{S}$  é la derivata di un'altra funzione in  $\mathcal{S}$  se e solo se  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 0$ . Infatti, se  $\varphi = \Phi'$  con  $\Phi \in \mathcal{S}$ , chiaramente si ha  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \Phi(+\infty) - \Phi(-\infty) = 0$ . Viceversa, se  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 0$  allora definiamo una funzione primitiva ponendo

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y) dy = - \int_x^{\infty} \varphi(y) dy.$$

Ovviamente,  $\Phi \in \mathcal{E}$  e rimane soltanto da mostrare che la funzione stessa tende a 0 all'infinito con velocità maggiore rispetto al reciproco di ogni polinomio. Sappiamo intanto che  $|\varphi(y)| \leq C(1+|y|)^{-(n+2)}$  per qualche costante  $C > 0$  ed ogni  $y \in \mathbb{R}$ . Quindi, per  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} (1+|x|)^n |\Phi(x)| &\leq (1+|x|)^n \int_x^{\infty} \frac{C}{(1+|y|)^{n+2}} dy \\ &\leq \int_x^{\infty} \frac{C}{(1+|y|)^2} dy \leq C_1, \end{aligned}$$

dove  $C_1 = C \int_{-\infty}^{\infty} (1+|y|)^{-2} dy$ . Per  $x < 0$  si procede in modo analogo. Questo mostra che  $\Phi \in \mathcal{S}$  e l'osservazione preliminare é cosí dimostrata. Proviamo ora il teorema. Dire che  $f$  é costante significa dire che la distribuzione é identificata con una funzione ordinaria costante e in questo caso la derivata ordinaria coincide con quella distribuzionale, cioè  $f' = 0$ . Viceversa, supponiamo che  $f' = 0$ . Allora

$$f'[\varphi] = -f[\varphi'] = 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Sia ora  $\psi_0 \in \mathcal{S}$  una funzione test tale che  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x) dx = 1$ . Per un'arbitraria funzione  $\varphi \in \mathcal{S}$  poniamo  $A = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$ . Allora  $\varphi - A\psi_0$  é una funzione

test con integrale nullo e quindi usando l'osservazione preliminare, essa é la derivata di qualche funzione in  $\mathcal{S}$ . Poniamo  $c = f[\psi_0]$ . Si ha,

$$\begin{aligned} 0 = f[\varphi - A\psi_0] &= f[\varphi] - Af[\psi_0] = f[\varphi] - f[\psi_0] \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \\ &= f[\varphi] - c \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

e quindi otteniamo  $f[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} c\varphi(x) dx$ . Per l'arbitrarietá della funzione  $\varphi$  questo implica che  $f$  puó essere identificata con la costante  $c$ . Il teorema é quindi completamente dimostrato.

Sia  $(f_j)_j \subset \mathcal{S}'$  una successione di distribuzioni. Supponiamo che  $g \in \mathcal{S}'$  abbia la proprietá che

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} f_j[\varphi] = g[\varphi]$$

per ogni  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Allora noi diremo che la successione  $(f_j)$  converge in  $\mathcal{S}'$  alla funzione  $g$ , e scriveremo  $f_j \rightarrow g(\mathcal{S}')$ .

Un caso particolare é costituito dalla nozione di convergenza distribuzionale di una successione di funzioni localmente integrabili e moderatamente crescenti. Diciamo che una tale successione  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  converge in senso distribuzionale ad una funzione  $f$  localmente integrabile e moderatamente crescente  $f$  se

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx,$$

per ogni  $\varphi \in \mathcal{S}$ .

Una analoga definizione sussiste utilizzando la classe  $\mathcal{D}$  invece della classe di Schwartz.

Concludiamo la sezione con una semplice applicazione ad una particolare equazione differenziale che coinvolge la distribuzione  $\delta$  di Dirac. In questo esempio le distribuzioni coinvolte si intendono definite sullo spazio delle funzioni test  $\mathcal{D}$ .

Risolviamo il seguente problema:  $y' + 2y = \delta(t - 1)$ , per  $t > 0$  con dato iniziale  $y(0) = 1$ .

Moltiplicando l'equazione per  $e^{2t}$  (fattore integrante), si ha

$$e^{2t} y' + 2e^{2t} y = e^{2t} \delta(t - 1),$$

da cui

$$\frac{d}{dt}(e^{2t}y) = e^2\delta(t-1).$$

L'ultimo passaggio segue dalla relazione  $\chi(t)\delta_a(t) = \chi(a)\delta_a(t)$ .

Pertanto si ha:

$$e^{2t}y = e^2H(t-1) + C,$$

con  $C$  costante arbitraria. Ponendo  $C = 1$  otteniamo la soluzione del problema

$$y(t) = e^{2-2t}H(t-1) + e^{-2t}, \quad t > 0.$$

## 9.4 La trasformata di Fourier di una distribuzione temperata

Se  $\varphi \in \mathcal{S}$  é ovvio che  $\varphi^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$  per ogni  $k = 0, 1, \dots$ . Questo implica che é possibile applicare la trasformata di Fourier a  $\varphi$  e a tutte le sue derivate e, utilizzando i risultati del Capitolo 5, si ha:

$$\widehat{\varphi}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-ixv} dx,$$

e  $\widehat{\varphi^{(k)}}(v) = (iv)^k \widehat{\varphi}(v)$ . Siccome la trasformata di Fourier di  $\varphi^{(k)}$  é limitata (essendo  $\varphi^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ ), ciò implica che esiste una costante  $C_k$  tale che

$$|v|^k |\widehat{\varphi}(v)| \leq C_k,$$

per ogni  $k \geq 0$ , cioè  $\widehat{\varphi}$  decresce a 0 all'infinito almeno con la velocità di  $1/|v|^k$ , per ogni  $k \geq 0$ . Inoltre, derivando successivamente la trasformata di Fourier (utilizzando un teorema di derivazione sotto il segno di integrale), otteniamo

$$\frac{d^n}{dv^n} \widehat{\varphi}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)(-ix)^n e^{-ixv} dx = \widehat{(-i \cdot)^n \varphi(\cdot)}(v),$$

e analogamente a prima, segue che queste derivate decrescono rapidamente a 0 quando  $|v| \rightarrow +\infty$ . Vale quindi il seguente teorema:

**Teorema 2** *La trasformata di Fourier  $\widehat{\cdot}$  é una biiezione continua di  $\mathcal{S}$  su se stesso.*

In parole povere, se  $\varphi \in \mathcal{S}$  sull'asse  $x$ , allora  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$  sull'asse  $v$ . Inoltre ogni funzione  $\psi \in \mathcal{S}$  é la trasformata di Fourier di una (unica) funzione  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Infatti, utilizzando la formula di inversione (Teorema 11 del Capitolo 5), si ha che

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v) e^{ixv} dv$$

é la funzione richiesta. Il fatto che la trasformata di Fourier sia una applicazione continua da  $\mathcal{S}$  a  $\mathcal{S}$  significa che se  $\varphi_j \rightarrow \psi$  in  $\mathcal{S}$  allora  $\widehat{\varphi}_j \rightarrow \widehat{\psi}$  in  $\mathcal{S}$ . Questo si basa essenzialmente sulle proprietà della trasformata di Fourier in  $L^1(\mathbb{R})$  relative all'operazione di derivazione, che implicano una relazione del tipo

$$\max_{v \in \mathbb{R}} (1 + |v|)^n |\widehat{\varphi}_j^{(k)}(v) - \widehat{\varphi}^{(k)}(v)| = \max_{v \in \mathbb{R}} (1 + |v|)^n |\widehat{\varphi}_j(v) - \widehat{\varphi}(v)|,$$

dove abbiamo posto  $\widetilde{\varphi}(x) := (-ix)^k \varphi(x)$ . Omettiamo i dettagli della dimostrazione.

Da quanto sopra, si deduce come la scelta della classe  $\mathcal{S}$  di funzioni test sia la piú appropriata per l'Analisi di Fourier.

Siamo ora pronti per introdurre la trasformata di Fourier di una distribuzione temperata. Ancora, trarremo ispirazione dalla formula di Parseval in  $L^1(\mathbb{R})$  (Teorema 9, Capitolo 5): se  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  risulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(v) g(v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \widehat{g}(v) dv.$$

Questa formula ci suggerisce un modo semplice per introdurre la distribuzione "trasformata di Fourier" di una distribuzione temperata.

Sia  $f \in \mathcal{S}'$ . La trasformata di  $f$ , denotata con  $\widehat{f}$ , é la distribuzione definita dalla formula

$$\widehat{f}[\varphi] = f[\widehat{\varphi}] \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Una notazione alternativa per  $\widehat{f}$  che useremo spesso é  $(f)^\wedge$ .

Per il Teorema 2, notiamo ancora una volta come la scelta della classe delle funzioni test sia la piú adatta, perché  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$  per ogni  $\varphi \in \mathcal{S}$  e quindi la definizione é ben posta. Si osservi infatti che se  $\varphi \in \mathcal{D}$ , allora  $\widehat{\varphi} \notin \mathcal{D}$ .

Verifichiamo ora che  $\widehat{f}$  é effettivamente una distribuzione temperata. Per la linearitá si ha, per  $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$  e  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{f}[c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2] &= f[(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)^\wedge] = f[c_1\widehat{\varphi}_1 + c_2\widehat{\varphi}_2] \\ &= c_1 f[\widehat{\varphi}_1] + c_2 f[\widehat{\varphi}_2] = c_1 \widehat{f}[\varphi_1] + c_2 \widehat{f}[\varphi_2]. \end{aligned}$$

La continuità é una semplice conseguenza della continuità della trasformata di Fourier in  $\mathcal{S}$ : se  $\varphi_j \rightarrow \psi(\mathcal{S})$  allora

$$\widehat{f}[\varphi_j] = f[\widehat{\varphi_j}] \rightarrow f[\widehat{\psi}] = \widehat{f}[\psi],$$

che é la continuità richiesta.

Facciamo ora qualche esempio.

- (a) Sia  $f(x) = 1$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Calcoliamo la trasformata di Fourier di  $f$ . Si ha (usando la formula di inversione per la funzione  $\varphi$ ):

$$\begin{aligned} \widehat{f}[\varphi] &= f[\widehat{\varphi}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{\varphi}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(x)dx \\ &= \sqrt{2\pi}\varphi(0) = \sqrt{2\pi}\delta[\varphi], \end{aligned}$$

da cui segue che  $\widehat{f} = \sqrt{2\pi}\delta$ , che puó essere scritto simbolicamente anche  $\widehat{f}(v) = \sqrt{2\pi}\delta(v)$ .

- (b) Determiniamo la trasformata di Fourier della distribuzione di Dirac. Si ha:

$$\widehat{\delta}[\varphi] = \delta[\widehat{\varphi}] = \widehat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx,$$

e quindi  $\widehat{\delta}$  é una distribuzione regolare determinata dalla costante  $1/\sqrt{2\pi}$ , cioè  $\widehat{\delta} = 1/\sqrt{2\pi}$ .

- (c) Sia  $f(x) = x^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . Questa funzione definisce una distribuzione temperata la cui trasformata di Fourier é data da

$$\widehat{f}[\varphi] = f[\widehat{\varphi}] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \widehat{\varphi}(x)dx.$$

Ora dalla (5.9) del Capitolo 5, segue che la trasformata di Fourier di  $(-i)^n \varphi^{(n)}$  é proprio  $x^n \widehat{\varphi}(x)$ . Siccome  $\delta^{(n)}[\varphi] = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$ , utilizzando ancora la formula di inversione si ottiene

$$\widehat{f}[\varphi] = \sqrt{2\pi} i^n \delta^{(n)}[\varphi].$$

- (d) Se  $f \in L^p(\mathbb{R})$ , con  $1 \leq p \leq 2$ , la trasformata di Fourier é una ordinaria funzione localmente integrabile e moderatamente crescente. La sua distribuzione (regolare) associata é definita dalla

$$\widehat{f}[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(v)\varphi(v)dv = f[\widehat{\varphi}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\widehat{\varphi}(v)dv,$$

cioé la trasformata di Fourier di  $f$  come distribuzione é equivalente alla trasformata di Fourier come ordinaria funzione e sussiste la relazione di Parseval.

(e) Determiniamo la trasformata di Fourier della funzione  $f(x) = \sin(ax)$ , con  $a$  costante reale. Ovviamente  $f$  é moderatamente crescente e la distribuzione associata é quindi regolare. Scrivendo

$$\sin(ax) = \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i},$$

si ha, usando la formula di inversione,

$$\begin{aligned} \widehat{f}[\varphi] &= f[\widehat{\varphi}] = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(v) \frac{e^{iav} - e^{-iav}}{2i} dv \\ &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(v) e^{iav} dv - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(v) e^{-iav} dv \\ &= \frac{1}{2i} \sqrt{2\pi} \varphi(a) - \frac{1}{2i} \sqrt{2\pi} \varphi(-a) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} i \{ \delta(x+a) - \delta(x-a) \}. \end{aligned}$$

Con lo stesso metodo, il lettore é invitato a calcolare la trasformata di Fourier della funzione  $\cos(ax)$ .

Prima di procedere con altri esempi, diamo ora una lista di proprietá della trasformata di Fourier. Premettiamo alcune definizioni e notazioni. Se  $f \in \mathcal{S}'$  denotiamo con  $\widetilde{f}$  la distribuzione, che simbolicamente si scrive  $f(-x)$ , definita dalla

$$\widetilde{f}[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(-x) dx = f[\varphi(-\cdot)].$$

Diremo che  $f$  é pari se  $\widetilde{f} = f$ , mentre  $f$  é dispari se  $\widetilde{f} = -f$ . Se  $a \in \mathbb{R}$  e  $\varphi \in \mathcal{S}$ , definiamo  $\varphi_a(x) = \varphi(x-a)$ . Se  $f \in \mathcal{S}'$  la distribuzione "translata"  $f_a$  é la distribuzione, simbolicamente denotata con  $f(x-a)$ , definita dalla

$$f_a[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x+a) dx = f[\varphi_{-a}].$$

Si hanno le seguenti proprietá:

**Teorema 3** *Se  $f \in \mathcal{S}'$  allora*

1.  $f$  é pari (risp. dispari)  $\leftrightarrow \widehat{f}$  é pari (risp. dispari).



2.  $\widehat{\tilde{f}} = \tilde{f}$ .
3.  $\widehat{f}_a = e^{-iav} \widehat{f}$ .
4.  $[e^{iax} f]^\wedge = (\widehat{f})_a$ .
5.  $\widehat{f}' = iv \widehat{f}$ .
6.  $(\widehat{f})' = [-ixf]^\wedge$ .

**Dimostrazione.** Proviamo alcune delle proprietà, le altre si provano in modo analogo. Iniziamo con la 2. Utilizzando le definizioni, si ha successivamente:

$$\widehat{\tilde{f}}[\varphi] = \widehat{f}[\widehat{\varphi}] = f[\widehat{\widehat{\varphi}}].$$

Essendo, per il teorema di inversione,

$$\widehat{\widehat{\varphi}}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(u) e^{-iuv} du = \varphi(-v),$$

si deduce subito l'asserto, per la definizione di  $\tilde{f}$ . Per la 4. si ha, successivamente,

$$(e^{iax} f)^\wedge[\varphi] = (e^{iax} f)[\widehat{\varphi}] = f[e^{iax} \widehat{\varphi}] = f[\widehat{\varphi}_{-a}] = \widehat{f}[\varphi_{-a}] = (\widehat{f})_a[\varphi],$$

da cui segue l'asserto. Infine proviamo la 5. Si ha:

$$\begin{aligned} \widehat{f}'[\varphi] &= f'[\widehat{\varphi}] = -f[(\widehat{\varphi})'] = -f[(-iv\varphi)^\wedge] = f[(i(\cdot)\varphi)^\wedge] \\ &= \widehat{f}[iv\varphi] = (iv\widehat{f})[\varphi], \end{aligned}$$

da cui segue l'asserto.

Facciamo ora qualche ulteriore esempio.

- (c) Calcoliamo la trasformata della distribuzione  $f = P.V.1/x$ . Abbiamo già visto che  $xf = 1$ . Trasformando ambo i membri, tenendo conto dell'esempio (a), si ottiene dal Teorema 3(6.),  $i(\widehat{f})' = \sqrt{2\pi}\delta = \sqrt{2\pi}H'$ , che può essere riscritta nella forma  $i(\widehat{f} + i\sqrt{2\pi}H)' = 0$ . Per il Teorema 1 si ha allora  $\widehat{f} + i\sqrt{2\pi}H = c$ , con  $c$  costante. Quindi  $\widehat{f} = c - i\sqrt{2\pi}H$ . Per determinare ora la costante  $c$  si può osservare che  $f$  è dispari e così anche  $\widehat{f}$ . Questo implica che  $c - i\sqrt{2\pi}H(x) = i\sqrt{2\pi}H(-x) - c$  da cui

essendo  $H(x) + H(-x) = 1$ , si ricava  $c = i(\sqrt{2\pi}/2)$ . La trasformata di  $f$  é dunque data da

$$\widehat{f} = i\frac{\sqrt{2\pi}}{2}(1 - 2H) = -i\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\operatorname{sgn}(x),$$

dove  $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$ , ( $x \neq 0$ ).

(d) Nell'esempio precedente abbiamo ottenuto la formula

$$(P.V.1/x)^\wedge(v) = i\frac{\sqrt{2\pi}}{2}(1 - 2H)(v).$$

Siccome entrambi i lati della precedente relazione sono distribuzioni dispari, usando la 2. del Teorema 3, si ha

$$i\frac{\sqrt{2\pi}}{2}(1 - 2H)^\wedge(v) = \widetilde{P.V.1/v} = -P.V.1/v.$$

D'altra parte  $(1 - 2H)^\wedge = \sqrt{2\pi}\delta - 2\widehat{H}$ . Da questo otteniamo

$$\widehat{H} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta - \frac{i}{\sqrt{2\pi}}P.V.\frac{1}{v}.$$

Concludiamo la sezione con il seguente

**Teorema 4** *Se  $f \in \mathcal{S}'$ , allora  $xf(x)$  é la distribuzione nulla se e solo se  $f = A\delta$ , per qualche costante  $A$ .*

**Dimostrazione.** Dalla  $xf(x) = 0$  per la 6. del Teorema 3 segue  $(\widehat{f})' = 0$  e quindi per il Teorema 1  $\widehat{f} = C$  con  $C$  costante. Tenendo conto che  $\widehat{1} = \sqrt{2\pi}\delta$  si ha infine l'asserto.

## 9.5 Convoluzioni

In questa sezione facciamo un brevissimo cenno alle convoluzioni che coinvolgono distribuzioni. La definizione di convoluzione, che abbiamo ampiamente discusso nei capitoli precedenti, può essere estesa al caso delle distribuzioni. Qui discuteremo il caso del prodotto di convoluzione tra una distribuzione temperata ed una funzione test. Sia allora  $f \in \mathcal{S}'$  e  $\varphi \in \mathcal{S}$ .

Posto  $\varphi_x(y) := \varphi(x - y)$ , definiamo la convoluzione  $f * \varphi$  ponendo (qui per semplicitá eviteremo di utilizzare le costanti di normalizzazione)

$$f * \varphi(x) = f[\varphi_x] = f[\varphi(x - \cdot)].$$

Simbolicamente, scriveremo

$$f * \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi(x - y)dy.$$

Con tale definizione la convoluzione  $f * \varphi$  é una ordinaria funzione della variabile  $x$ . É possibile dimostrare che  $f * \varphi$  é infinitamente differenziabile e risulta

$$(f * \varphi)^{(n)} = f * \varphi^{(n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Come nel caso classico vale anche il teorema di convoluzione per la trasformata di Fourier, cioè si prova che

$$\widehat{f * \varphi} = \widehat{\varphi} \widehat{f}.$$

Per le dimostrazioni si può consultare A. Vretblad [4].

Un altro caso interessante é la convoluzione di una distribuzione regolare, associata ad una funzione moderatamente crescente e continua  $f$  con la distribuzione  $\delta$ . Si ha:

$$\delta * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)f(x - y)dy = [f(x - y)]_{y=0} = f(x).$$

Questo significa che la funzione  $\delta$  funge da elemento neutro del prodotto  $f * g$ .

Osserviamo che é anche possibile definire una convoluzione in situazioni piú generali usando formule di inversione del prodotto  $\widehat{f}\widehat{g}$ , ma qui non tratteremo questo caso.

L'uso delle convoluzioni precisa in qualche modo come una distribuzione sia un oggetto vicino ad una ordinaria funzione. Infatti, sia  $f$  una distribuzione e  $\varphi$  una funzione test (che può essere presa per esempio in  $\mathcal{D}$ ). Supponiamo che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1.$$

Posto per ogni  $n \in \mathbb{N}$   $\varphi_n(x) := n\varphi(nx)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , si ha che la famiglia  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é una identità approssimata e pertanto, se  $\psi$  é una generica funzione test,

$\varphi_n * \psi \rightarrow \psi$  uniformemente, e lo stesso avviene per tutte le derivate successive, cioè  $(\varphi_n * \psi)^{(k)} \rightarrow \psi^{(k)}$ . Ora è possibile dimostrare (si veda per esempio [8]) che

$$(f * \varphi)[\psi] = f[\varphi * \psi],$$

per ogni funzione test  $\psi$ . Pertanto,

$$(f * \varphi_n)[\psi] = f[\varphi_n * \psi] \rightarrow f[\psi],$$

cioè  $f * \varphi_n$  converge ad  $f$  nel senso distribuzionale (si dice anche che  $f * \varphi_n$  converge ad  $f$  debolmente). Siccome le funzioni  $f * \varphi_n$  sono ordinarie funzioni di classe  $C^\infty$ , questo fatto ci dice che ogni distribuzione è limite debole di una successione di funzioni di classe  $C^\infty$ .

## 9.6 Alcune applicazioni

In questa sezione conclusiva illustriamo alcune applicazioni della teoria sviluppata.

### 9.6.1 Applicazioni alle equazioni differenziali

Consideriamo un operatore differenziale del tipo

$$P(D) := a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$$

che è definito dalla

$$P(D)(y) := a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y.$$

Se  $y$  è una distribuzione temperata l'operatore  $P(D)$  può essere considerato come un'applicazione lineare  $\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ .

Se  $P(D)$  opera su una convoluzione  $f * \varphi$ , dove  $f \in \mathcal{S}'$  e  $\varphi \in \mathcal{S}$ , allora utilizzando la linearità e le proprietà della derivazione, si può provare che

$$P(D)(f * \varphi) = (P(D)f) * \varphi = f * (P(D)\varphi).$$

Supponiamo ora che  $E \in \mathcal{S}'$  sia una distribuzione tale che  $P(D)E = \delta$  e sia  $f$  un'arbitraria funzione continua. Allora, formalmente si ha:  $P(D)(E * f) = (P(D)E) * f = \delta * f = f$ . Pertanto se troviamo  $E$  otteniamo una soluzione particolare dell'equazione differenziale  $P(D)y = f$ , dove  $f$  è un'arbitraria

funzione continua. La distribuzione  $E$  si chiama "soluzione fondamentale dell'operatore  $P(D)$ ". Facciamo subito un esempio.

Sia  $a > 0$ . Troviamo una soluzione fondamentale dell'operatore  $P(D) = D^2 + a^2$ . In sostanza cerchiamo una distribuzione  $E$  tale che  $E'' + a^2 E = \delta$ . Usando la trasformata di Fourier otteniamo allora (senza utilizzare la normalizzazione per le trasformate di Fourier coinvolte)

$$(iv)^2 \widehat{E} + a^2 \widehat{E} = \widehat{\delta} = 1,$$

da cui si ha

$$\widehat{E} = \frac{1}{a^2 - v^2} = \frac{i}{4a} \left( \frac{2}{i(v+a)} - \frac{2}{i(v-a)} \right).$$

Ora si può vedere che la trasformata di Fourier della funzione  $\text{sgn}(t) = H(t) - H(-t)$  è  $2/(iv)$ . Si perviene quindi alla soluzione

$$y(t) = \frac{i}{4a} (e^{-iat} \text{sgn}(t) - e^{iat} \text{sgn}(t)) = \frac{1}{2a} \sin(at) \cdot (2H(t) - 1).$$

Consideriamo ora l'equazione del calore

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

con il dato  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , dove ora  $f$  è una distribuzione temperata. Assumiamo che per ogni fissato  $t > 0$  l'oggetto definito simbolicamente da  $x \rightarrow u(x, t)$  sia una distribuzione temperata. Se denotiamo la trasformata di Fourier di  $u(\cdot, t)$  rispetto ad  $x$  con  $U(v, t)$ , trasformando l'equazione otteniamo:

$$-v^2 U = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad t > 0; \quad U(v, 0) = \widehat{f}.$$

Questa equazione può ora essere risolta come prima, ottenendo come soluzione

$$U(v, t) = e^{-v^2 t} \widehat{f}.$$

Così  $U(v, t)$  è il prodotto di una distribuzione ed una funzione test. Utilizzando la trasformazione inversa, otteniamo la soluzione nella forma  $u(x, t) = G(x, t) * f$ , che è una convoluzione tra una funzione test ( $G(x, t)$ ) ed una distribuzione  $f$ . Il fatto interessante è che ora una tale convoluzione è un'ordinaria funzione di classe  $C^\infty$  che soddisfa l'equazione del calore. Il dato iniziale va ora interpretato come

$$u(\cdot, t) \rightarrow f(\mathcal{S}'), \quad t \rightarrow 0.$$

## 9.6.2 Il teorema di Paley-Wiener-Schwartz

Il teorema di Paley-Wiener può essere esteso al caso di funzioni  $f \in B_\sigma^p$  con  $p > 2$  interpretando  $f$  come una distribuzione temperata (regolare) ed utilizzando la trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni. Nel teorema che segue, le restrizioni delle funzioni  $f$  all'asse reale si assumono moderatamente crescenti ed in  $L^p(\mathbb{R})$ . Quando parleremo di funzioni moderatamente crescenti ci riferiremo sempre alla loro restrizione sull'asse reale. Si ha il seguente teorema:

**Teorema 5** (*Paley-Wiener-Schwartz*) *Se  $f \in B_\sigma^p$  è una funzione moderatamente crescente, allora  $\widehat{f}$  ha supporto compatto in  $[-\sigma, \sigma]$ . Viceversa, se  $f$  è la trasformata inversa di una distribuzione con supporto compatto, allora  $f \in B_\sigma^p$ .*

Il teorema di Shannon può ora essere enunciato nella sua forma generale, utilizzando gli spazi di Bernstein.

**Teorema 6** *Per ogni  $f \in B_\sigma^p$  con  $p \geq 1$  e  $\sigma > 0$ , si ha*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\sigma}{\pi}z - k\right) \quad (z \in \mathbf{C}). \quad (9.1)$$

*La serie converge assolutamente ed uniformemente sui compatti di  $\mathbf{C}$  e anche nella norma dello spazio  $L^p(\mathbb{R})$ .*

# Appendice: Cenni di Analisi Complessa

## 0.1 Funzioni di variabile complessa

Sia  $A \subset \mathbb{C}$  un sottoinsieme del campo complesso i cui elementi saranno indicati con  $z = x + iy = (x, y)$  e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione. Una tale funzione é determinata da due funzioni a valori reali  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  che sono la parte reale e la parte immaginaria di  $f$ , cioé scriviamo:

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = \operatorname{Re}f(z) + i\operatorname{Im}f(z), \quad z = (x, y) \in A.$$

Chiameremo  $f$  una "funzione complessa". Tale funzione é quindi rappresentata da una funzione definita in un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  a valori in  $\mathbb{R}^2$ . Per tali funzioni é possibile introdurre i classici concetti di limite, continuitá, derivabilitá. Iniziamo col definire il concetto di limite in un punto di accumulazione di  $A$ .

Se  $z_0$  é un punto di accumulazione di  $A$ , diciamo che  $f$  ammette limite  $\ell \in \mathbb{C}$  per  $z \rightarrow z_0$  e scriviamo

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \ell$$

se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni  $z \in A$  con  $0 < |z - z_0| < \delta$  risulta  $|f(z) - \ell| < \varepsilon$ .

Attraverso un ampliamento del campo complesso ottenuto introducendo un "punto all'infinito" é anche possibile estendere le definizioni di limite al caso  $\ell = \infty$  e al caso in cui  $z \rightarrow \infty$ . Tuttavia non discuteremo qui queste estensioni.

Dalla definizione di limite posta, che formalmente é analoga a quella usuale per funzioni reali, si riottengono tutte le proprietá principali dei limiti

delle funzioni reali, ad eccezione di quelle che coinvolgono l'ordinamento di  $\mathbb{R}$ .

Posto  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z = (x, y)$ ,  $z_0 = (x_0, y_0)$ ,  $\ell = \ell_1 + i\ell_2$ , si dimostra la seguente proprietà:

**Proposizione 1** *Se  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \ell$ , allora*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = \ell_1, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = \ell_2.$$

Se  $z_0 \in A$ , con  $z_0$  punto di accumulazione di  $A$ , diciamo che  $f$  è continua in  $z_0$  se esiste il limite di  $f$  per  $z \rightarrow z_0$  e tale limite coincide con  $f(z_0)$ , cioè:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Se  $A$  è una regione, cioè un insieme del piano complesso aperto e connesso, diciamo che  $f$  è continua in  $A$  se lo è in ogni punto di  $A$ . Dalla Proposizione 1 segue che  $f$  è continua in  $A$  se e solo se lo sono le funzioni  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$ .

Sia ora  $z_0 \in A$  un punto di accumulazione di  $A$ . Diciamo che  $f$  è derivabile (in modo complesso) in  $z_0$  se esiste finito il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

limite che denoteremo con  $f'(z_0)$ . Diremo che  $f$  è derivabile in una regione  $A$  se lo è in ogni punto di  $A$ . Analogamente si definiscono le derivate successive.

La definizione di derivata è quindi formalmente analoga a quella per le funzioni reali e ciò implica che le sue proprietà elementari si deducono immediatamente da quelle note per le funzioni reali. Tuttavia, le conseguenze sono profondamente diverse. Ad esempio, anticipiamo il fatto che, a differenza di ciò che accade nel caso reale, se una funzione complessa è derivabile in una regione  $A$  allora è automaticamente infinitamente derivabile, anzi è sviluppabile in serie di Taylor. Per questo motivo, le funzioni derivabili (in modo complesso) in  $A$  vengono dette "funzioni analitiche" oppure "funzioni olomorfe" in  $A$ . Ovviamente, ogni funzione analitica in una regione  $A$  è anche continua in  $A$ . Supporremo sempre che  $A$  sia una regione del campo complesso. Si dimostra la seguente fondamentale condizione necessaria per la derivabilità.



**Proposizione 2** Se  $f = u + iv$  é derivabile in  $z_0 = (x_0, y_0) \in A$  allora le funzioni  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  risultano differenziabili in  $(x_0, y_0)$  e sussistono le relazioni:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Inoltre si ha:

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

Le equazioni nella Proposizione 2 si chiamano "equazioni di Cauchy-Riemann" oppure "condizioni di monogeneitá".

La proposizione precedente puó essere anche invertita, cioè se  $u, v$  sono due funzioni differenziabili in un punto  $z_0 = (x_0, y_0) \in A$  che soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann in  $(x_0, y_0)$  allora  $f = u + iv$  é derivabile in  $z_0$  e risulta

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

Se  $f = u + iv$  é derivabile in ogni punto di una regione  $A$  allora le equazioni di Cauchy-Riemann valgono in ogni punto di  $A$  e le funzioni  $u, v$  sono differenziabili in  $A$ .

Le equazioni di Cauchy-Riemann pongono delle restrizioni importanti alla derivabilitá di una funzione complessa. Infatti date due funzioni  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$ , con qualsiasi tipo di regolaritá, la funzione  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$  non é detto che sia derivabile. Consideriamo infatti la funzione complessa  $f(z) = \bar{z}$ , cioè la funzione che associa a  $z$  il suo coniugato. Si ha  $f(z) = f(x, y) = x - iy$ , quindi  $u(x, y) = x$  e  $v(x, y) = -y$ . Le funzioni  $u, v$  sono ovviamente infinitamente derivabili, ma le equazioni di Cauchy-Riemann non sono verificate (come é facile controllare). Pertanto  $f$  non é derivabile.

Tra gli esempi di funzioni analitiche, citiamo anzitutto i polinomi di variabile complessa  $P(z)$  di qualsiasi grado e la funzione esponenziale nel campo complesso  $e^z$  che é definita attraverso lo sviluppo in serie

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Scrivendo  $z = x + iy$  si ha

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$

Quindi  $e^z = u(x, y) + iv(x, y)$  con  $u(x, y) = e^x \cos y$  e  $v(x, y) = e^x \sin y$ . É immediato verificare che  $u, v$  soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann.

Altri esempi sono le funzioni trigonometriche in campo complesso ( $z \in \mathbf{C}$ )

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

e le funzioni iperboliche ( $z \in \mathbf{C}$ )

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Il logaritmo principale di un numero complesso  $z$  diverso da zero, é definito dalla

$$\log z = \log |z| + i \arg z,$$

dove  $\arg z$  é l'argomento principale di  $z$ , cioè  $-\pi < \arg z \leq \pi$ . Tale funzione é discontinua in ogni punto del semiasse reale negativo, ma si dimostra facilmente che essa é analitica nella regione  $A = \mathbf{C} \setminus \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\}$ .

Le funzioni analitiche in una regione  $A \subset \mathbf{C}$  sono legate alle funzioni armoniche reali definite nel piano. Una funzione  $u : A \rightarrow \mathbf{R}$  si dice "armonica" in  $A$  se é di classe  $C^2(A)$  ed é soluzione dell'equazione

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in A.$$

La classe delle funzioni armoniche in  $A$  é indicata con  $H(A)$ . Si ha la seguente proposizione.

**Proposizione 3** *Se  $f = u + iv$  é analitica in  $A$  allora  $u, v \in H(A)$ . Inoltre se  $u \in H(A)$ , esiste una funzione  $v \in H(A)$  tale che  $f = u + iv$  é analitica in  $A$ .*

La funzione  $v$  ottenuta nella proposizione precedente si chiama "armonica coniugata" di  $u$ . Si noti che in generale se  $u, v$  sono due funzioni armoniche, non é detto che  $f = u + iv$  é analitica. Basta ad esempio prendere  $u(x, y) = 2x$  e  $v(x, y) = y$ , che sono armoniche in  $A = \mathbf{C}$  ma  $f(x, y) = 2x + iy$  non é analitica perché non verifica le equazioni di Cauchy-Riemann.

## 0.2 Integrazione in campo complesso

Sia  $A \subset \mathbb{C}$  una regione e  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione continua. Sia  $\mathcal{C}$  una curva regolare orientata in  $A$  di equazioni  $z(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $t \in [a, b]$ . Definiamo l'integrale curvilineo di  $f$  sulla curva  $\mathcal{C}$  ponendo

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz := \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

Scrivendo  $f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$  e  $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , l'integrale si scrive:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f(z) dz &= \int_a^b [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)] dt + \\ &+ i \int_a^b [v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)] dt. \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale curvilineo  $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz$  ha come parte reale e parte immaginaria gli integrali curvilinei delle forme differenziali lineari  $udx - vdy$  e  $vdx + udy$ , cioè

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}} (udx - vdy) + i \int_{\mathcal{C}} (vdx + udy).$$

L'integrale introdotto verifica alcune delle proprietà elementari note per gli integrali curvilinei, come la proprietà additiva rispetto agli archi di curva e la linearità. Inoltre, ponendo

$$\int_{\mathcal{C}} |f| |dz| := \int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt,$$

si ha la proprietà (Darboux):

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| \leq \int_{\mathcal{C}} |f| |dz| \leq M \ell(\mathcal{C}),$$

dove  $M := \max_{z \in \mathcal{C}} |f(z)|$  e  $\ell(\mathcal{C})$  denota la lunghezza della curva  $\mathcal{C}$ .

Le definizioni si estendono ad archi di curva generalmente regolari. Se  $\mathcal{C}$  è costituita da un numero finito di archi regolari  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ , si pone

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\mathcal{C}_k} f(z) dz.$$

Se  $D \subset \mathbf{C}$  é un dominio regolare del piano, l'orientamento positivo della sua frontiera  $Fr(D)$ , che é una curva generalmente regolare, é quello per il quale un osservatore che cammina su  $Fr(D)$  lascia alla sua sinistra l'interno del dominio  $D$ .

Il teorema che enunceremo costituisce una delle proprietá piú importanti delle funzioni analitiche in una regione.

**Teorema 1** (Cauchy-Goursat)

Se  $f$  é analitica in una regione  $A$  e se  $D \subset A$  é un dominio regolare, allora

$$\int_{Fr(D)} f(z)dz = 0.$$

La dimostrazione é semplice se si assume preliminarmente che la funzione é di classe  $C^1(A)$  perché in tal caso essa si basa sulle formule di Gauss-Green, essendo le forme differenziali che definiscono l'integrale, chiuse. La parte piú complicata é l'estensione al caso generale.

Il teorema "chiave" per mostrare l'infinita derivabilitá delle funzioni analitiche é il seguente

**Teorema 2** (Morera)

Sia  $f : A \rightarrow \mathbf{C}$  continua in  $A$ . Se per ogni dominio rettangolare  $R \subset A$  risulta

$$\int_{Fr(R)} f(z)dz = 0,$$

la  $f$  é di classe  $C^\infty(A)$ .

Combinando i teoremi di Cauchy-Goursat e di Morera segue subito che una funzione analitica in  $A$  é infinitamente derivabile.

Come conseguenze interessanti sussistono le seguenti formule integrali (dette formule di Cauchy):

Se  $f$  é analitica in  $A$  e  $D \subset A$  é un dominio regolare, per ogni  $z_0 \in D^\circ$  si ha:

(a)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Fr(D)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

(b) Per  $n = 1, 2, \dots$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{Fr(D)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Nel successivo paragrafo enunceremo il teorema di Taylor che ci assicura la sviluppabilità in serie delle funzioni analitiche.

### 0.3 Sviluppo in serie di Taylor e gli zeri delle funzioni analitiche

Sia  $A$  una regione del campo complesso e sia  $z_0 \in A$  un punto fissato. Denoteremo con  $B_r(z_0)$  la palla (aperta) di centro  $z_0$  e raggio  $r > 0$ , cioè:

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Sussiste il seguente

**Teorema 3** (Taylor). *Sia  $f : A \rightarrow \mathbf{C}$  una funzione analitica in  $A$ . Comunque si fissino  $z_0 \in A$  e una palla  $B_r(z_0) \subset A$ , risulta  $f$  sviluppabile in serie di Taylor, con centro in  $z_0$ , in  $B_r(z_0)$ , cioè risulta:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad z \in B_r(z_0).$$

Nell'analisi reale sappiamo che se una funzione  $f$  è di classe  $C^\infty$  in un intorno di un punto  $x_0$ , essa non risulta necessariamente sviluppabile in serie. Un esempio tipico è fornito dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Un altro esempio che mostra quanto l'analisi complessa sia utile anche per comprendere alcuni aspetti dell'analisi reale è il seguente. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

e prendiamo  $x_0 = 0$ . Come é noto questa funzione é sviluppabile in serie di Taylor per  $|x| < 1$  e risulta

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Tuttavia la funzione  $f$  risulta di classe  $C^\infty$  in tutto  $\mathbb{R}$ . Il Teorema di Taylor fornisce una spiegazione di ciò in modo semplice. Infatti, la funzione complessa

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}, \quad z \in \mathbb{C}$$

non é definita se  $z = \pm i$ . Pertanto, il massimo disco di convergenza con centro in  $z_0 = 0$  contenuto nel dominio di analiticitá ha raggio 1. Intersecando tale disco con l'asse delle reale si ottiene l'intervallo aperto  $] - 1, 1[$ .

Il Teorema 3 ha anche altre importanti conseguenze. Un punto  $z_0 \in A$  nel quale la  $f$  si annulla si chiama uno "zero" della funzione  $f$ . Premettiamo il seguente risultato:

**Proposizione 4** . *Sia  $f$  una funzione analitica in  $A$  e  $z_0 \in A$  un punto fissato. Se esiste  $r > 0$  tale che  $f(z) = 0$  per ogni  $z \in B_r(z_0)$  allora risulta  $f(z) = 0$  per ogni  $z \in A$ .*

La dimostrazione usa il Teorema 3 e la connessione di  $A$ . Una conseguenza immediata é la seguente proprietá: se  $z_0 \in A$  é un punto nel quale la  $f$  si annulla insieme a tutte le derivate successive, allora  $f(z) = 0$  per ogni  $z \in A$ . Infatti il Teorema di Taylor implica che la  $f$  si annulla in tutti i punti di un disco contenuto in  $A$ , e quindi si applica la Proposizione 4. Questo implica quindi che, se  $f$  non é identicamente nulla, uno zero  $z_0$  di  $f$  puó avere soltanto un ordine finito. Cioé esiste un intero  $p$  tale che

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(p-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(p)}(z_0) \neq 0.$$

Da quanto precede, si puó ottenere il seguente risultato generale

**Teorema 4** *Sia  $f$  una funzione analitica in  $A$  non identicamente nulla. L'insieme degli zeri di  $f$  non puó avere punti di accumulazione in  $A$ .*

Una dimostrazione semplice puó essere fatta per assurdo: se esistesse un punto di accumulazione  $z_0 \in A$  dell'insieme degli zeri, si sviluppa in serie di

Taylor la  $f$  in un intorno di  $z_0$  e si arriva a provare che tutti i coefficienti sono necessariamente nulli.

Un risultato collegato é il seguente "principio di identità delle funzioni analitiche" che estende il classico principio di identità dei polinomi: se  $f, g$  sono due funzioni analitiche in  $A$  che coincidono su un sottoinsieme  $B$  con un punto di accumulazione in  $A$ , allora esse coincidono ovunque in  $A$ .

Si osservi che l'insieme degli zeri di una funzione analitica può avere un punto di accumulazione, ma tale punto, se esiste, deve appartenere necessariamente alla frontiera di  $A$ . Un esempio é fornito dalla funzione  $f(z) = \sin(1/z)$  che é analitica in  $\mathbf{C} \setminus \{0\}$  i cui zeri  $z = 1/(k\pi)$  si accumulano in 0.

Una ulteriore importante proprietà dell'analiticità di una funzione complessa é il seguente principio di massimo (si confronti con il Teorema 2 del Capitolo 4):

**Teorema 5** *Sia  $f$  una funzione analitica non costante in un dominio limitato  $D$ , chiusura di una regione  $A$ . Allora  $|f|$  assume il massimo valore sulla frontiera di  $D$ .*

Una funzione complessa  $f$  si dice "intera" se essa é analitica in tutto il campo complesso. Le funzioni intere hanno un comportamento particolare, descritto dal seguente teorema di Liouville:

**Teorema 6** *Una funzione intera e limitata é necessariamente costante.*

**Dimostrazione.** Sia  $L > 0$  tale che  $|f(z)| \leq L$  per ogni  $z \in \mathbf{C}$ . Siccome la  $f$  é intera essa é sviluppabile in serie di Taylor in ogni disco  $B(0, R)$  con  $R > 0$ , cioè:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad (|z| < R).$$

Inoltre dalla formula integrale (b) per le derivate, applicata al cerchio con centro nell'origine e raggio  $R$  e la proprietà di Darboux, si ha

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{L}{R^{n+1}} 2\pi R = \frac{L}{R^n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

da cui, per  $R \rightarrow +\infty$ , si ricava  $f^{(n)}(0) = 0$  per ogni  $n = 1, 2, \dots$ . Da questo segue l'asserto.

# Bibliography

- [1] T.M.Apostol *Mathematical Analysis* Addison-Wesley Publ. Co. 1974.
- [2] R. P. Boas jr, *Entire Functions*, Academic Press, New York, 1954.
- [3] P.L. Butzer - P.J.S.G. Ferreira - R.J.Higgins - G.Schmeisser - R.L. Stens, *The sampling theorem, Poisson's summation formula, general Parseval formula, reproducing kernel formula and the Paley-Wiener theorem for bandlimited signals-their interconnections*, Appl. Anal., 90, (3-4), (2011), 431-461.
- [4] P.L. Butzer - J.R. Higgins, R.L. Stens, *Classical and approximate sampling theorems; studies in the  $L^p(\mathbb{R})$  and the uniform norm*, J. Approx. Theory, 137 (2005), 250-263.
- [5] P.L.Butzer -R.J.Nessel *Fourier Analysis and Approximation* Academic Press, 1971.
- [6] P.L. Butzer - R.L. Stens, *Linear prediction by samples from the past*, Shannon Sampling and Interpolation Theory II, Edited by R.J. Marx II, Springer-Verlag, 1993.
- [7] L.C. Evans *Partial Differential Equations*, Graduate text in Math., 19, AMS, 1998.
- [8] G.B. Folland *Fourier Analysis and its Applications*, AMS, Pure and Applied Undergraduated Text, 2009.
- [9] A.H.Griffel *Applied Functional Analysis* John Wiley and Sons, 1981.
- [10] J.R. Higgins, *Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis*, Oxford Science Publ., Clarendon Press, 1996.



- [11] A.N.Kolmogorov -A.Fomin *Elementi di Teoria delle Funzioni e di Analisi Funzionale* Edizioni MIR, 1980.
- [12] A.Papoulis *Signal Analysis* McGraw-Hill, 1977.
- [13] W.Rudin *Analisi Reale e Complessa* Boringhieri, 1974.
- [14] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1973.
- [15] G.F.Simmons *Introduction to Topology and Modern Analysis* McGraw-Hill, 1963.
- [16] A. Vretblad *Fourier Analysis and its Applications*, Springer-Verlag, 2003.
- [17] A. Zygmund, *Trigonometric series, voll I and II*, Cambridge Univ. Press, Third Edition, 2002.