# I Esonero 24 marzo 2023

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

**1)** Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{4} + \frac{x^3+y^3}{3}$$

nel quadrato di vertici $(-1,-1),(0,-1),(0,0),(-1,0)$. Cosa si può dire dei massimi e minimi relativi di $f$ nel suo campo di esistenza $\mathbb{R}^2$?

Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^3\Big(\frac{x}{4}+\frac{1}{3}\Big) + y^3\Big(\frac{y}{4}+\frac{1}{3}\Big)$$

nel quadrato di vertici $(-1,-1),(0,-1),(0,0),(-1,0)$. Cosa si può dire dei massimi e minimi relativi di $f$ nel suo campo di esistenza $\mathbb{R}^2$?

Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^3\Big(\frac{2}{3}+\frac{x}{2}\Big) + y^3\Big(\frac{y}{2}+\frac{2}{3}\Big)$$

nel quadrato di vertici $(-1,-1),(0,-1),(0,0),(-1,0)$. Cosa si può dire dei massimi e minimi relativi di $f$ nel suo campo di esistenza $\mathbb{R}^2$?

**2)** Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della

$$f(x,y) = \frac{x^4-y^4}{4} + \frac{x^3-y^3}{3}$$

nel quadrato di vertici $(-1,-1),(0,-1),(0,0),(-1,0)$. Cosa si può dire dei massimi e minimi relativi di $f$ nel suo campo di esistenza $\mathbb{R}^2$?

---

### Svolgimento

**1)** Sia $Q$ il quadrato di vertici $(-1,-1),(0,-1),(0,0),(-1,0)$. Siccome $Q$ è un compatto ed $f$ è continua, il teorema di Weierstrass ci assicura l'esistenza di punti di massimo e di minimo assoluti. Iniziamo a cercarli in $Q^\circ$. Siccome $f \in C^2(Q^\circ)$ i punti di massimo e di minimo vanno cercati fra quelli che annullano il gradiente. Le derivate parziali di $f$ sono date da

$$\big\{\nabla f(x,y) = (x^3+x^2,\, y^3+y^2) = (0,0), \qquad (x,y)\in Q^\circ\big\} = \emptyset.$$

I punti di massimo e di minimo si troveranno allora sulla frontiera di $Q$.

- Primo tratto $x=0, -1\le y\le 0$: risulta $f(0,y) = \dfrac{y^4}{4}+\dfrac{y^3}{3} := g_0(y)$. Risulta $g_0'(y) = y^2(y+1)$, quindi $g_0$ è non descescente, pertanto $y=-1$ punto di minimo e $y=0$ punto di massimo per $g_0$.

- tratto $x = -1, -1 \leq y \leq 0$: risulta $f(-1, y) = -\dfrac{1}{12} + \dfrac{y^4}{4} + \dfrac{y^3}{3} := g_{-1}(y)$. Risulta $g'_{-1}(y) = y^2(y + 1)$, quindi $g_{-1}$ è non descescente, pertanto $y = -1$ punto di minimo e $y = 0$ punto di massimo per $g_{-1}$.
- tratto $y = 0, -1 \leq x \leq 0$; risulta $f(x, 0) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} := h_0(x)$. Risulta $h'_0(x) = x^2(x + 1)$, quindi $h_0$ è non descescente, pertanto $x = -1$ punto di minimo e $x = 0$ punto di massimo per $h_0$.
- tratto $y = -1, -1 \leq x \leq 0$; risulta $f(x, -1) = -\dfrac{1}{12} + \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} := h_{-1}(x)$. Risulta $h'_{-1}(x) = x^2(x + 1)$, quindi $h_{-1}$ è non descescente, pertanto $x = -1$ punto di minimo e $x = 0$ punto di massimo per $h_{-1}$.

In base alle risultanze allora, per il teorema di Weierstrass,

$$\min_{(x,y)\in Q} f(x, y) = f(-1, -1) = -\frac{1}{6}, \qquad \max_{(x,y)\in Q} f(x, y) = f(0, 0) = 0.$$

Studiamo ora i punti di massimo e di minimo relativo in $\mathbb{R}^2$. I punti che annullano il gradiente sono $(0, 0), (-1, 0), (0, -1), (-1, -1)$. Possiamo immediatamente dire, visto i risultati precedenti, che $(-1, 0), (0, -1)$ sono punti sella perché la funzione $f$ presenta comportamenti diversi su due restrizioni che passano per quei punti e sono parallele agli assi coordinati. Restano da esaminare $(0, 0)$ e $(-1, 1)$. Risulta

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2x & 0 \\ 0 & 3y^2 + 2y \end{pmatrix}$$

e dunque $detH(-1, -1) = 1, f''_{xx}(-1, -1) = 1$. Il punto $(-1, -1)$ è dunque punto di minimo relativo, in $(0, 0)$ il determinante della matrice Hessiana si annulla e serve un supplemento di indagine. Abbiamo già due restrizioni che passano per l'origine per le quali l'origine è un punto di massimo. Se consideriamo la restrizione $(x, -x)$ allora $f(x, -x) = \dfrac{x^4}{2}$ che ha un minimo in $x = 0$, pertanto $(0, 0)$ è un punto sella.

**2)** Sia $Q$ il quadrato di vertici $(-1, -1), (0, -1), (0, 0), (-1, 0)$. Siccome $Q$ è un compatto ed $f$ è continua, il teorema di Weierstrass ci assicura l'esistenza di punti di massimo e di minimo assoluti. Iniziamo a cercarli in $Q^\circ$. Siccome $f \in C^2(Q^\circ)$ i punti di massimo e di minimo vanno cercati fra quelli che annullano il gradiente. Le derivate parziali di $f$ sono date da

$$\left\{\nabla f(x, y) = (x^3 + x^2, -y^3 - y^2) = (0, 0), \qquad (x, y) \in Q^\circ\right\} = \emptyset.$$

I punti di massimo e di minimo si troveranno allora sulla frontiera di $Q$.

- Primo tratto $x = 0, -1 \leq y \leq 0$: risulta $f(0, y) = -\dfrac{y^4}{4} - \dfrac{y^3}{3} := g_0(y)$. Risulta $g'_0(y) = -y^2(y + 1)$, quindi $g_0$ è non crescente, pertanto $y = -1$ punto di massimo e $y = 0$ punto di minimo per $g_0$.
- tratto $x = -1, -1 \leq y \leq 0$: risulta $f(-1, y) = -\dfrac{1}{12} - \dfrac{y^4}{4} - \dfrac{y^3}{3} := g_{-1}(y)$. Risulta $g'_{-1}(y) = -y^2(y + 1)$, quindi $g_{-1}$ è non crescente, pertanto $y = -1$ punto di massimo e $y = 0$ punto di minimo per $g_{-1}$.

- tratto $y = 0, -1 \leq x \leq 0$; risulta $f(x,0) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} := h_0(x)$. Risulta $h_0'(x) = x^2(x+1)$, quindi $h_0$ è non descescente, pertanto $x = -1$ punto di minimo e $x = 0$ punto di massimo per $h_0$.
- tratto $y = -1, -1 \leq x \leq 0$; risulta $f(x,-1) = \dfrac{1}{12} + \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} := h_{-1}(x)$. Risulta $h_{-1}'(x) = x^2(x+1)$, quindi $h_{-1}$ è non descescente, pertanto $x = -1$ punto di minimo e $x = 0$ punto di massimo per $h_{-1}$.

In base alle risultanze allora, per il teorema di Weierstrass,

$$\min_{(x,y)\in Q} f(x,y) = f(-1,0) = -\frac{1}{12}, \qquad \max_{(x,y)\in Q} f(x,y) = f(0,-1) = \frac{1}{12}.$$

Studiamo ora i punti di massimo e di minimo relativo in $\mathbb{R}^2$. I punti che annullano il gradiente sono $(0,0), (-1,0), (0,-1), (-1,-1)$. Possiamo immediatamente dire, visto i risultati precedenti, che $(0,0), (-1,-1)$ sono punti sella perché la funzione $f$ presenta comportamenti diversi su due restrizioni che passano per quei punti e sono parallele agli assi coordinati. Restano da esaminare $(0,-1)$ e $(-1,0)$. Risulta

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2x & 0 \\ 0 & -3y^2 - 2y \end{pmatrix}$$

e dunque $detH(0,-1) = detH(-1,0) = 0$. Nei punti $(0,-1)$ e $(-1,0)$, il determinante della matrice Hessiana si annulla e serve un supplemento di indagine. Per quanto riguarda $(0,-1)$, considerando la restrizione $(x,-1)$, risulta $f(x,-1)$ crescente per $x > -1$ e pertanto $(0,-1)$ è un punto di crescenza locale. D'altra parte, sulla restrizione $(0,y)$, la funzione $f(0,y)$ presenta un massimo in $y = -1$. Concludiamo quindi che $(0,-1)$ è di sella.
Passando a esaminare $(-1,0)$, risulta $f(-1,y)$ descrescente per $y > -1$ e pertanto $(-1,0)$ è un punto di decrescenza locale. D'altra parte, sulla restrizione $(x,0)$, la funzione $f(x,0)$ presenta un minimo in $x = -1$. Concludiamo quindi che $(-1,0)$ è di sella

# II Esonero 28 aprile 2023

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

**1)** Sia

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2x} \le y \le \frac{1}{x},\ 2x^2 \le y \le 3x^2\}.$$

Calcolare $I = \iint_D \frac{x^2}{y} e^{xy} dxdy.$ **(11 punti)**

**2)** Calcolare

$$\int_{\mathcal{C}} y^2 ds, \qquad r(t) = (t, e^t), \quad 0 \le t \le \log 2.$$ **(8 punti)**

**3)** Determinare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ nell'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 3 - xy\}.$$ **(11 punti)**

---

**Svolgimento**

**1)** Dalle condizioni imposte su $D$ risulta che esso si trova nel primo quadrante con $x > 0$. Dalla disuguaglianza $\frac{1}{2x} \le y \le \frac{1}{x}$ otteniamo $\frac{1}{2} \le xy \le 1$. Dall'altra $2 \le \frac{y}{x^2} \le 3$. Utilizziamo allora la sostituzione $xy = u$, $\frac{y}{x^2} = v$. Risulta

$$\begin{cases} x = (\frac{u}{v})^{1/3} \\ y = (u^2 v)^{1/3} \end{cases} \qquad (u,v) \in [1/2, 1] \times [2,3].$$

La trasformazione è sicuramente biiettiva e di classe $C^1([1/2,1] \times [2,3])$ (quindi le derivate parziali sono uniformemente continue per il teorema di Heine), inoltre

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3(\frac{u}{v})^{2/3} v} & -\frac{u}{3(\frac{u}{v})^{2/3} v^2} \\ \frac{2uv}{3(u^2v)^{2/3}} & \frac{u^2}{3(u^2v)^{2/3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^2}{(\frac{u}{v})^{2/3}\, v\, (u^2 v)^{2/3}} = \frac{1}{3v} > 0 \quad \forall (u,v) \in [1/2,1] \times [2,3].$$

Tutte le ipotesi del teorema di integrazione per sostituzione sono soddisfatte. Dunque

$$I \;=\; \iint_D \frac{x^2}{y} e^{xy} dxdy = \frac{1}{3} \int_{1/2}^{1} e^u du \int_2^3 \frac{1}{v^2} dv = \frac{1}{3} \cdot (e - \sqrt{e}) \cdot \big[ - v^{-1} \big]_2^3 = \frac{1}{18} \cdot (e - \sqrt{e}).$$

**2)** La funzione $f(x,y)=y^2$ è continua in tutto $\mathbb{R}^2$. Quindi $\mathcal{C}\subset\mathbb{R}^2$. La curva è inoltre regolare perché è semplice e la sua rappresentazione $r$ è di classe $C^1$; inoltre $x'(t)=1\neq 0$ per ogni $t\in[0,\log 2]$. Risulta $ds=\sqrt{1+e^{2t}}dt$ e dunque

$$\int_{\mathcal{C}} y^2 ds \quad = \quad \int_0^{\log 2} e^{2t}\sqrt{1+e^{2t}}dt = \left[\frac{1}{3}\big(1+e^{2t}\big)^{3/2}\right]_0^{\log 2} = \frac{5^{3/2}-2^{3/2}}{3}$$

**3)** La funzione $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ inoltre $\nabla f(x,y)=(0,0)$ solo nell'origine. Siccome $(0,0)\in A$ e $f(x,y)\geq 0$ sempre, allora l'origine sarà di minimo assoluto per $f$ su $A$. Proviamo che l'insieme $A$ è un compatto. Innanzitutto

$$\begin{aligned}
& x^2+y^2\leq 3-xy \quad \Longleftrightarrow \quad x^2+y^2+xy\leq 3 \quad \Longleftrightarrow \quad (x+\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2\leq 3\\
& \Longrightarrow \quad y^2\leq 4 \quad (|y|\leq 2) \quad \& \quad (x+\frac{y}{2})^2\leq 3 \quad \Longrightarrow \quad (|y|\leq 2) \quad \& \quad |x|\leq\sqrt{3}+1.
\end{aligned}$$

Quindi l'insieme $A$ è limitato perché racchiuso in un rettangolo. Inoltre, posto $g(x,y)=x^2+y^2+xy$ risulta $A=g^{-1}([0,3])$ e dunque $A$ è chiuso per il criterio di continuità globale. Il teorema di Weierstrass assicura l'esistenza dei punti di massimo e di minimo assoluto in $A$. Il minimo assoluto è stato già trovato, cerchiamo il massimo assoluto sulla frontiera di $A$. Poniamo $\varphi(x,y)=x^2+y^2+xy-3=0$.
Cerchiamo i candidati con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e poniamo $F(x,y,a)=x^2+y^2+a(x^2+y^2+xy-3)$.
Innanzitutto Il sistema $\nabla\varphi(x,y)=(2x+y,2y+x)=(0,0)$ & $\varphi(x,y)=0$ non ha soluzioni. I candidati quindi saranno soluzioni del sistema

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} 2x+a(2x+y)=0\\ 2y+a(2y+x)=0\\ x^2+y^2+xy=3\end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad a\neq 0 \quad \& \quad x\neq 0, y\neq 0\\
&\begin{cases} 2xy+a(2x+y)y=0\\ 2yx+a(2y+x)x=0\\ x^2+y^2+xy=3\end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a(2x+y)y=a(2y+x)x\\ x^2+y^2+xy=3\end{cases} \quad \Longleftrightarrow\\
&\begin{cases} y^2=x^2\\ x^2+y^2+xy=3\end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y=\pm x\\ x^2+y^2+xy=3\end{cases} \quad \Longleftrightarrow\\
&(1,1) \quad (-1,-1) \quad (\sqrt{3},-\sqrt{3}) \quad (-\sqrt{3},\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Risulta $f(1,1)=f(-1,-1)=2$, $f((\sqrt{3},-\sqrt{3})=f(-\sqrt{3},\sqrt{3})=6$ quindi i punti di massimo assoluto sono $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

**Esonero 29 maggio 2023**

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

**1)** Sia $S$ la superficie ottenuta dalla rotazione di un angolo piatto attorno all'asse $z$ della curva $z = 2 - x$, $x \in [2, 4]$ e orientata in modo che la normale abbia terza componente positiva. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da $F(x, y, z) = \Big(x^2y, xy^2, z\Big)$. Il flusso di $F$ attraverso $S$ è pari a

- $0$
- $-\dfrac{20}{3}\pi$
- $\dfrac{\pi}{3}$
- $\dfrac{\pi}{6}$
- $\dfrac{\pi^2}{12}$

**2)** Data la superficie cartesiana $S$ definita dalla funzione $f(x, y) = x^2y - 4x - y^2$ trovare il versore $\nu$ normale ad essa nel punto $(1, 1, f(1, 1))$.

- $\nu = \Big(\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, 0\Big)$
- $\nu = \Big(\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\Big)$
- $\nu = \Big(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big)$
- $\nu = \Big(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\Big)$

**3)** Data la forma differenziale

$$\omega = \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 5y^2\Big)dx + \Big(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 10xy\Big)dy.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \Big(\cos(\pi t) + t^2, 1 + t^2\Big)$$

- $-3 - \sqrt{2}$
- $-3 + \sqrt{2}$
- $-2 - \sqrt{5}$
- $-2 + \sqrt{5}$

---

**Svolgimento**

**1)** Parametrizziamo la superficie $S$ (la metà di un tronco di cono) :

$$\begin{cases} x = u\cos t \\ y = u\sin t \\ z = 2-u \end{cases} \qquad (u,t)\in[2,4]\times[0,\pi].$$

Calcoliamo la sua normale

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos t & \sin t & -1 \\ -u\sin t & u\cos t & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(u\cos t)+\vec{j}(u\sin t)+\vec{k}u.$$

$$\begin{aligned} F|_S &= (u^3\cos^2 t\sin t, u^3\cos t\sin^2 t, 2-u) \\ F|_S \bullet (L,M,N) &= (u^3\cos^2 t\sin t, u^3\cos t\sin^2 t, 2-u)\bullet(-u\cos t, u\sin t, u) = \\ &= u^4\cos t\sin t + 2u - u^2 \\ \int_S F\cdot(L,M,N)dudt &= \int_0^\pi dt\int_2^4 (u^4\cos t\sin t + 2u-u^2)du \\ &= \int_0^\pi dt\Big[\frac{u^5}{5}\sin t\cos t + u^2 - \frac{u^3}{3}\Big]_2^4 = \\ &= \Big[\frac{u^5}{5}\Big]_2^4\cdot\int_0^\pi \sin t\cos t\,dt + \pi\cdot\Big[u^2-\frac{u^3}{3}\Big]_2^4 = -\frac{20}{3}\pi. \end{aligned}$$

**2)** Risulta

$$\begin{aligned} n &= \Big(-f'_x, -f'_y, 1\Big) = \Big(4-2xy, 2y-x^2, 1\Big) \\ \text{se } (x,y) &= (1,1) \quad\Longrightarrow\quad n=(2,1,1), \quad \|n\|=\sqrt{6} \\ \nu &= \Big(\frac{2}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}\Big) \end{aligned}$$

**3)**

$$\omega = \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 5y^2\Big)dx + \Big(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 10xy\Big)dy.$$

Le componenti sono di classe $C^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$. Inoltre

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+5y^2\Big) &= -\frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot 2y + 10y \\ \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+10xy\Big) &= -\frac{y}{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot 2x + 10y \end{aligned}$$

e dunque la $\omega$ è chiusa. Siccome non è definita in un semplicemente connesso, per provare la sua esattezza utilizziamo la CNES che utilizza le curve generalmente regolari chiuse con sostegno nel campo di esistenza. Grazie alle formule di Green e alla condizione sufficiente sulle componenti semplicemente connesse basta calcolare un integrale curvilineo su una singola curva chiusa che circonda l'origine (buco). Sia $\mathcal{C}$ definita da $(\cos t, \sin t), 0\le t\le 2\pi$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}}\omega &= \int_0^{2\pi}\Big[\Big(\frac{\cos t}{1}+5\sin^2 t\Big)(-\sin t) + \Big(\frac{\sin t}{1}+10\sin t\cos t\Big)(\cos t)\Big]dt = \\ &= \int_0^{2\pi}\Big[-\sin t\cos t - 5\sin^3 t + \sin t\cos t + 10\sin t\cos^2 t\Big]dt = 0. \end{aligned}$$

Dunque $\omega$ è esatta e una primitiva può essere determinata ad esempio a partire da $(1,0)$ nel semipiano delle $x$ positive.

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^2}}dt + \int_0^y \Big(\frac{t}{\sqrt{x^2+t^2}} + 10xt\Big)dt = \\ &= (x-1) + \sqrt{x^2+y^2} - x + 5xy^2 = \sqrt{x^2+y^2} + 5xy^2 - 1. \end{aligned}$$

Osserviamo che il gradiente di $U$ coincide con le componenti di $\omega$ su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Siccome la curva $\gamma$ congiunge i punti $(1,1)$ e $(0,2)$ allora

$$\int_\gamma \omega = U(0,2) - U(1,1) = 1 - \sqrt{2} - 4 = -3 - \sqrt{2}.$$

Analisi Matematica II - A.A. 2023/2024 - CdS Ingegneria Informatica ed Elettronica

**A**

**Esonero 27 Ottobre 2023** iscritto al secondo anno di corso SI NO BES/DSA

---

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

**1)** Sia $p$ il numero delle lettere del proprio nome. Calcolare, se esiste, il seguente integrale

$$\int_0^\infty x^p e^{-x^2} dx$$

(punteggio 9)

**2)** Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{n\sqrt[3]{x}}{1+n^2x^2}$ nella semiretta $[1, +\infty[$.

(punteggio 9)

**3)** Sviluppare, in serie di soli coseni, la funzione $f$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2-4x & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

La serie di Fourier ottenuta converge uniformemente? A chi? Calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2}$$

(punteggio 12)

---

## Svolgimento

**1)** Supponiamo che $p = 2k$ con $k \ge 2$. La funzione $f(x) = x^{2k}e^{-x^2}$ è una funzione continua, dunque integrabile in ogni intervallo del tipo $[0, a]$ con $a > 0$. Inoltre

$$\lim_{x\to\infty} x^{2k}e^{-x^2} = 0$$

ed è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a qualunque potenza intera $n \in \mathbb{N}$ dell'infinitesimo principale $\frac{1}{x}$; in particolare è un infinitesimo di ordine superiore a 2 e quindi la funzione risulta integrabile in $[0, \infty[$. Calcoliamo ora l'integrale $\int x^{2k}e^{-x^2}dx$ con la sostituzione $x^2 = y$, $xdx = \frac{1}{2}dy$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{2k}e^{-x^2}dx &= \lim_{a\to\infty}\int_0^a x^{2k}e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}\int_0^{a^2} y^{\frac{2k-1}{2}}e^{-y}dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty y^{\frac{2k+1}{2}-1}e^{-y}dy = \\ &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\frac{(p-1)!!}{2^{p/2}}.\end{aligned}$$

Supponiamo che $p = 2k+1$ con $k \geq 2$. La funzione $f(x) = x^{2k+1}e^{-x^2}$ è una funzione continua, dunque integrabile in ogni intervallo del tipo $[0, a]$ con $a > 0$. Inoltre

$$\lim_{x\to\infty} x^{2k+1}e^{-x^2} = 0$$

ed è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a qualunque potenza intera $n \in \mathbb{N}$ dell'infinitesimo principale $\frac{1}{x}$; in particolare è un infinitesimo di ordine superiore a 2 e quindi la funzione risulta integrabile in $[0, \infty[$. Calcoliamo ora l'integrale $\int x^{2k+1}e^{-x^2}dx$ con la sostituzione $x^2 = y$, $xdx = \frac{1}{2}dy$

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x^{2k+1}e^{-x^2}dx &= \lim_{a\to\infty}\int_0^a x^{2k+1}e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}\int_0^{a^2} y^k e^{-y}dy = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} y^{(k+1)-1}e^{-y}dy = \\ &= \frac{1}{2}\Gamma(k+1) = \frac{1}{2}k!.\end{aligned}$$

**2)** $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{n\sqrt[3]{x}}{1+n^2x^2} = 0$ per ogni $x \geq 1$. Pertanto la convergenza è puntuale alla funzione identicamente nulla. Inoltre

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\geq 1}|f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\geq 1}\frac{n\sqrt[3]{x}}{1+n^2x^2} \leq \lim_{n\to\infty}\sup_{x\geq 1}\frac{n\sqrt[3]{x}}{n^2x^2} = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\geq 1}\frac{x^{-5/3}}{n}$$

La funzione $x^{-5/3}$ è decrescente in $[1, +\infty[$ e dunque il suo massimo è realizzato per $x = 1$. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\geq 1}|f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

pertanto la successione converge uniformemente.

**3)** Sia $\widetilde{f}(x)$ la funzione definita come

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} 2-4x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 4x+2 & -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

$\widetilde{f} \in C([-1, 1])$, tutti i suoi punti interni sono di derivabilità ad eccezione dei punti $x = 0, \pm\frac{1}{2}$ in cui la funzione ha comunque derivate destra e sinistra limitate. Possiamo renderla periodica di periodo $T = 2$. Pertanto la funzione è sviluppabile in serie di Fourier e la sua somma coincide con $\widetilde{f}$. Risulta

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2\int_0^{1/2}(2-4x)dx = 1\\
a_n &= 2\int_0^{1/2}(2-4x)\cos(n\pi x)dx = 4\int_0^{1/2}\cos(n\pi x)dx - 8\int_0^{1/2}x\cos(n\pi x)dx =\\
&= 4\Big[\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big]_0^{1/2} - 8\int_0^{1/2}x\big(\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\big)'dx =\\
&= \frac{4}{n\pi}\sin(n\frac{\pi}{2}) - 8\Big\{\Big[x\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big]_0^{1/2} - \int_0^{1/2}\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)dx\Big\} =\\
&= \frac{4}{n\pi}\sin(n\frac{\pi}{2}) - \frac{4}{n\pi}\sin(n\frac{\pi}{2}) - \frac{8}{n^2\pi^2}\Big[\cos(n\pi x)\Big]_0^{1/2} = \frac{8}{n^2\pi^2}\big(1-\cos(n\frac{\pi}{2})\big)\\
b_n &= 0.
\end{aligned}$$

Ricordando che

$$\cos(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} (-1)^k & n=2k\\ 0 & n=2k+1,\end{cases}$$

si ha

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{8}{n^2\pi^2}\big(1-\cos(n\frac{\pi}{2})\big) = \begin{cases} \dfrac{8}{(2k+1)^2\pi^2} & n=2k+1\\[2ex] \dfrac{8}{4k^2\pi^2}\big(1-(-1)^k\big) & n=2k\end{cases} =\\
&= \begin{cases} \dfrac{8}{(2k+1)^2\pi^2} & n=2k+1\\[2ex] 0 & n=2k,\ k \text{ pari}\\ \dfrac{4}{k^2\pi^2} & n=2k,\ k \text{ dispari}\ .\end{cases}
\end{aligned}$$

Per il teorema di convergenza puntuale la somma della serie di Fourier coincide con la funzione $f$ in $[0,1]$ e dunque

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)\pi x) + \frac{4}{\pi^2}\sum_{\substack{k=1,\\ k \text{ dispari}}}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos((2k)\pi x).$$

In particolare, per $x=0$, risulta

$$\widetilde{f}(0) = 2 = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left[2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{\substack{k=1,\\ k \text{ dispari}}}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right]$$

e dunque, osservando che

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{\substack{k=1,\\ k \text{ dispari}}}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

si ottiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

B

**Esonero 27 Ottobre 2023** iscritto al secondo anno di corso SI NO BES/DSA

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

**1)** Sia $p$ il numero delle lettere del proprio nome. Calcolare, se esiste, il seguente integrale

$$\int_0^\infty x^p e^{-x^2} dx$$

(punteggio 9)

**2)** Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{n\sqrt[3]{x}}{2+n^2x^2}$ nella semiretta $[1, +\infty[$.

(punteggio 9)

**3)** Sviluppare, in serie di soli coseni, la funzione $f$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 4x-2 & \dfrac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

La serie di Fourier ottenuta converge uniformemente? A chi? Calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

(punteggio 12)

## Svolgimento

**1)** vedi esercizio 1 compito A.

**2)** $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{n\sqrt[3]{x}}{2+n^2x^2} = 0$ per ogni $x \ge 1$. Pertanto la convergenza è puntuale alla funzione identicamente nulla. Inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\ge 1} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\ge 1} \frac{n\sqrt[3]{x}}{2+n^2x^2} \le \lim_{n\to\infty} \sup_{x\ge 1} \frac{n\sqrt[3]{x}}{n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\ge 1} \frac{x^{-5/3}}{n}$$

La funzione $x^{-5/3}$ è decrescente in $[1, +\infty[$ e dunque il suo massimo è realizzato per $x = 1$. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\ge 1} |f_n(x) - f(x)| \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

pertanto la successione converge uniformemente.

**3)** Sia $\widetilde{f}(x)$ la funzione definita come

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} -4x-2 & -1 \leq x \leq -\dfrac{1}{2} \\ 0 & -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2} \\ 4x-2 & \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$\widetilde{f} \in C([-1,1])$, tutti i suoi punti interni sono di derivabilità ad eccezione dei punti $x = \pm\dfrac{1}{2}$ in cui la funzione ha comunque derivata destra e sinistra limitate. Possiamo renderla periodica di periodo $T = 2$.
Pertanto la funzione è sviluppabile in serie di Fourier e la sua somma coincide con $\widetilde{f}$. Risulta

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2\int_{1/2}^{1}(4x-2)dx = 1 \\
a_n &= 2\int_{1/2}^{1}(4x-2)\cos(n\pi x)dx = 8\int_{1/2}^{1} x\cos(n\pi x)dx - 4\int_{1/2}^{1}\cos(n\pi x)dx = \\
&= 8\int_{1/2}^{1} x\big(\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\big)'dx - 4\Big[\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big]_{1/2}^{1} = \\
&= 8\Big\{\Big[x\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big]_{1/2}^{1} - \int_{1/2}^{1}\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)dx\Big\} + \frac{4}{n\pi}\sin(n\frac{\pi}{2}) = \\
&= -\frac{4}{n\pi}\sin(n\frac{\pi}{2}) + \frac{4}{n\pi}\sin(n\frac{\pi}{2}) + \frac{8}{n^2\pi^2}\Big[\cos(n\pi x)\Big]_{1/2}^{1} = \frac{8}{n^2\pi^2}\big((-1)^n - \cos(n\frac{\pi}{2})\big) \\
b_n &= 0.
\end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{8}{n^2\pi^2}\big((-1)^n - \cos(n\frac{\pi}{2})\big) = \begin{cases} -\dfrac{8}{(2k+1)^2\pi^2} & n = 2k+1 \\ \dfrac{2}{k^2\pi^2}\big(1-(-1)^k\big) & n = 2k \end{cases} = \\
&= \begin{cases} -\dfrac{8}{(2k+1)^2\pi^2} & n = 2k+1 \\ 0 & n = 2k,\ k \text{ pari} \\ \dfrac{4}{k^2\pi^2} & n = 2k,\ k \text{ dispari} . \end{cases}
\end{aligned}$$

Per il teorema di convergenza puntuale la somma della serie di Fourier coincide con la funzione $f$ in $[0,1]$ e dunque

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)\pi x) + \frac{4}{\pi^2}\sum_{\substack{k=1, \\ k \text{ dispari}}}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos((2k)\pi x).$$

In particolare per $x = 0$ risulta

$$f(0) = 0 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left[2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} - \sum_{\substack{k=1,\\ k \text{ dispari}}}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right],$$

e dunque, osservando che

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{\substack{k=1,\\ k \text{ dispari}}}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

si ottiene

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Analisi Matematica II - A.A. 2023/2024 - CdS Ingegneria Informatica ed Elettronica

$\boxed{\text{C}}$

**Esonero 27 Ottobre 2023** iscritto al secondo anno di corso $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$ BES/DSA $\square$

---

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

**1)** Sia $p$ il numero delle lettere del proprio nome. Calcolare, se esiste, il seguente integrale

$$\int_0^\infty x^p e^{-x^2} dx$$

(punteggio 9)

**2)** Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{n\sqrt[3]{x}-1}{1+n^2x^2}$ nella semiretta $[1, +\infty[$.

(punteggio 9)

**3)** Sviluppare, in serie di soli coseni, la funzione $f$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x \le -\dfrac{1}{2} \\ 4x+2 & -\dfrac{1}{2} < x \le 0. \end{cases}$$

La serie di Fourier ottenuta converge uniformemente? A chi? Calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

(punteggio 12)

---

## Svolgimento

**1)** vedi esercizio 1 compito A.

**2)** $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{n\sqrt[3]{x}-1}{1+n^2x^2} = 0$ per ogni $x \ge 1$. Pertanto la convergenza è puntuale alla funzione identicamente nulla. Inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\ge 1} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\ge 1} \frac{n\sqrt[3]{x}-1}{1+n^2x^2} \le \lim_{n\to\infty} \sup_{x\ge 1} \frac{n\sqrt[3]{x}}{n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\ge 1} \frac{x^{-5/3}}{n}$$

La funzione $x^{-5/3}$ è decrescente in $[1, +\infty[$ e dunque il suo massimo è realizzato per $x = 1$. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\ge 1} |f_n(x) - f(x)| \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

pertanto la successione converge uniformemente.

**3)** Sia $\widetilde{f}(x)$ la funzione periodica di periodo $T = 2$ definita da

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} 4x + 2 & -\dfrac{1}{2} \leq x \leq 0 \\ 2 - 4x & 0 < x \leq \dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Lo sviluppo della sua serie di Fourier è quello dell'esercizio 3 del compito A.

D

**Esonero 27 Ottobre 2023** iscritto al secondo anno di corso SI NO BES/DSA

---

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

**1)** Sia $p$ il numero delle lettere del proprio nome. Calcolare, se esiste, il seguente integrale

$$\int_0^\infty x^p e^{-x^2} dx$$

(punteggio 9)

**2)** Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{n\sqrt[4]{x}}{2+n^2x^2}$ nella semiretta $[1, +\infty[$.

(punteggio 9)

**3)** Sviluppare, in serie di soli coseni, la funzione $f$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} -4x-2 & -1 \leq x \leq -\dfrac{1}{2} \\ 0 & -\dfrac{1}{2} < x \leq 0. \end{cases}$$

La serie di Fourier ottenuta converge uniformemente? A chi? Calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

(punteggio 12)

---

## Svolgimento

**1)** vedi esercizio 1 compito A.

**2)** $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{n\sqrt[4]{x}}{2+n^2x^2} = 0$ per ogni $x \geq 1$. Pertanto la convergenza è puntuale alla funzione identicamente nulla. Inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 1} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 1} \frac{n\sqrt[4]{x}}{2+n^2x^2} \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 1} \frac{n\sqrt[4]{x}}{n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 1} \frac{x^{-7/4}}{n}$$

La funzione $x^{-7/4}$ è decrescente in $[1, +\infty[$ e dunque il suo massimo è realizzato per $x = 1$. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 1} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

pertanto la successione converge uniformemente.

**3)** Sia $\widetilde{f}(x)$ la funzione periodica di periodo $T = 2$ definita da

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} -4x - 2 & -1 \le x \le -\dfrac{1}{2} \\ 0 & -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2} \\ 4x - 2 & \dfrac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

Lo sviluppo della sua serie di Fourier è quello dell'esercizio 3 del compito B.

**A**

## Esonero 24 Novembre 2023

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

**1)** Data la funzione

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + 6xy - e^{3x} \ln(1 + z^2), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

indicare quali affermazioni sono vere:

**(a)** il punto $(0, 0, 0)$ è un punto di sella per la funzione $f$;

**(b)** il punto $(-2, -2, 0)$ è un punto di minimo relativo per la funzione $f$;

**(c)** il punto $(-2, -2, 0)$ è un punto di massimo relativo per la funzione $f$;

**(d)** nessuna delle precedenti.

**2)** Risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 7y(t) + t \\ y'(t) = -2x(t) - 5y(t) + e^t \end{cases}$$

### Svolgimento

**1)** Risulta $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Annullando il gradiente della funzione, ovvero risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f'_x(x, y, z) = 3x^2 + 6y - 3e^{3x} \ln(1 + z^2) = 0 \\ f'_y(x, y, z) = 3y^2 + 6x = 0 \\ f'_z(x, y, z) = -e^{3x} \frac{2z}{1+z^2} = 0 \end{cases}$$

otteniamo che i punti critici sono $(0, 0, 0)$ e $(-2, -2, 0)$.
Siccome $n > 2$, per determinare la natura dei punti dobbiamo studiare il segno degli autovalori della matrice Hessiana. Le derivate seconde sono:

$$\begin{aligned} &f''_{xx}(x, y, z) = 6x - 9e^{3x} \ln(1 + z^2), \\ &f''_{xy}(x, y, z) = 6 = f''_{yx}(x, y, z), \\ &f''_{xz}(x, y, z) = -3e^{3x} \frac{2z}{1 + z^2} = f''_{zx}(x, y, z), \\ &f''_{yy}(x, y, z) = 6y, \\ &f''_{yz}(x, y, z) = 0 = f''_{zy}(x, y, z), \\ &f''_{zz}(x, y, z) = -e^{3x} \frac{2 - 2z^2}{(1 + z^2)^2}. \end{aligned}$$

Riguardo al punto $(0,0,0)$, otteniamo

$$\det(H(0,0,0)-\lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(0,0,0)-\lambda & f''_{xy}(0,0,0) & f''_{xz}(0,0,0) \\ f''_{yx}(0,0,0) & f''_{yy}(0,0,0)-\lambda & f''_{yz}(0,0,0) \\ f''_{zx}(0,0,0) & f''_{zy}(0,0,0) & f''_{zz}(0,0,0)-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 6 & 0 \\ 6 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(\lambda^2-36).$$

Ponendo $\det(H(0,0,0)-\lambda\mathbb{I})=0$ si ha che

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_{2,3} = \pm 6,$$

e dunque la forma quadratica è indefinita. Il punto $(0,0,0)$ è pertanto di sella per la funzione.
Passiamo ora a studiare il punto $(-2,-2,0)$. Per esso abbiamo

$$\det(H(-2,-2,0)-\lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(-2,-2,0)-\lambda & f''_{xy}(-2,-2,0) & f''_{xz}(-2,-2,0) \\ f''_{yx}(-2,-2,0) & f''_{yy}(-2,-2,0)-\lambda & f''_{yz}(-2,-2,0) \\ f''_{zx}(-2,-2,0) & f''_{zy}(-2,-2,0) & f''_{zz}(-2,-2,0)-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -12-\lambda & 6 & 0 \\ 6 & -12-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2e^{-6}-\lambda \end{vmatrix} = (-2e^{-6}-\lambda)(\lambda^2+24\lambda+108).$$

Ponendo $\det(H(-2,-2,0)-\lambda\mathbb{I})=0$ e applicando la regola di Cartesio al'equazione $\lambda^2+24\lambda+108=0$, deduciamo che

$$\lambda_1 = -2e^{-6} < 0, \qquad \lambda_{2,3} < 0,$$

e dunque la forma quadratica è definita negativa. Il punto $(-2,-2,0)$ è pertanto di massimo relativo per la funzione.

**2)** Se deriviamo la prima equazione rispetto a $t$ e sostituiamo al posto di $y'(t)$ la seconda equazione e al posto di $7y(t) = x'(t) - 4x(t) - t$, otteniamo

$$\begin{aligned} x''(t) &= 4x'(t) + 7y'(t) + 1 = 4x'(t) - 14x(t) - 35y(t) + 7e^t + 1 \\ &= 4x'(t) - 14x(t) - 5x'(t) + 20x(t) + 5t + 7e^t + 1 \end{aligned}$$

e dunque otteniamo l'equazioni lineare del secondo ordine completa

$$x''(t) + x'(t) - 6x(t) = 5t + 1 + 7e^t.$$

L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea $z^2+z-6=0$ ha come soluzioni $z=-3, z=2$ e dunque l'integrale generale della omogenea è dato da

$$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}.$$

Determiniamo ora una soluzione particolare di $x''(t)+x'(t)-6x(t)=5t+1 \quad \rightarrow \quad x_1(t)=-\frac{5}{6}t-\frac{11}{36}$.
Determiniamo una soluzione particolare di di $x''(t)+x'(t)-6x(t)=7e^t \quad \rightarrow \quad x_2(t)=-\frac{7}{4}e^t$. Pertanto risulta

$$
\begin{aligned}
x(t) &= c_1e^{-3t}+c_2e^{2t}-\frac{5}{6}t-\frac{11}{36}-\frac{7}{4}e^t \\
x'(t) &= -3c_1e^{-3t}+2c_2e^{2t}-\frac{5}{6}-\frac{7}{4}e^t \\
y(t) &= \frac{1}{7}\big(x'(t)-4x(t)-t\big)=-c_1e^{-3t}-\frac{2}{7}c_2e^{2t}+\frac{1}{3}t+\frac{1}{18}+\frac{3}{4}e^t.
\end{aligned}
$$

**B**

**Esonero 24 Novembre 2023**

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

**1)** Data la funzione

$$f(x,y,z) = 3x^3 + 3y^3 + xy + e^{2x}\arctan(3z^2), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

indicare quali affermazioni sono vere:

**(a)** il punto $(0,0,0)$ è un punto di sella per la funzione $f$;

**(b)** il punto $(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 0)$ è un punto di minimo relativo per la funzione $f$;

**(c)** il punto $(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 0)$ è un punto di massimo relativo per la funzione $f$;

**(d)** il punto $(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 0)$ è di sella per la funzione $f$.

**2)** Risolvere il seguente di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + 3t \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) + 2e^t \end{cases}$$

## Svolgimento

**1)** Risulta $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Annullando il gradiente della funzione, ovvero risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f'_x(x,y,z) = 9x^2 + y + 2e^{2x}\arctan(3z^2) = 0 \\ f'_y(x,y,z) = 9y^2 + x = 0 \\ f'_z(x,y,z) = e^{2x}\frac{6z}{1+9z^4} = 0 \end{cases}$$

otteniamo che i punti critici sono $(0,0,0)$ e $(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 0)$.
Siccome $n > 2$, per determinare la natura dei punti dobbiamo studiare il segno degli autovalori della matrice Hessiana. Le derivate seconde sono:

$$\begin{aligned}
&f''_{xx}(x,y,z) = 18x + 4e^{2x}\arctan(3z^2), \\
&f''_{xy}(x,y,z) = 1 = f''_{yx}(x,y,z), \\
&f''_{xz}(x,y,z) = 2e^{2x}\frac{6z}{1+9z^4} = f''_{zx}(x,y,z), \\
&f''_{yy}(x,y,z) = 18y, \\
&f''_{yz}(x,y,z) = 0 = f''_{zy}(x,y,z), \\
&f''_{zz}(x,y,z) = e^{2x}\frac{6-162z^4}{(1+9z^4)^2}.
\end{aligned}$$

Riguardo al punto $(0,0,0)$, otteniamo

$$\det(H(0,0,0)-\lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(0,0,0)-\lambda & f''_{xy}(0,0,0) & f''_{xz}(0,0,0) \\ f''_{yx}(0,0,0) & f''_{yy}(0,0,0)-\lambda & f''_{yz}(0,0,0) \\ f''_{zx}(0,0,0) & f''_{zy}(0,0,0) & f''_{zz}(0,0,0)-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(\lambda^2-1).$$

Ponendo $\det(H(0,0,0)-\lambda\mathbb{I}) = 0$ si ha che

$$\lambda_1 = 6, \qquad \lambda_{2,3} = \pm 1,$$

e dunque la forma quadratica è indefinita. Il punto $(0,0,0)$ è pertanto di sella per la funzione.
Passiamo ora a studiare il punto $(-\frac{1}{9},-\frac{1}{9},0)$. Per esso abbiamo

$$\det\left(H\left(-\frac{1}{9},-\frac{1}{9},0\right)-\lambda\mathbb{I}\right) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(-\frac{1}{9},-\frac{1}{9},0)-\lambda & f''_{xy}(-\frac{1}{9},-\frac{1}{9},0) & f''_{xz}(-\frac{1}{9},-\frac{1}{9},0) \\ f''_{yx}(-\frac{1}{9},-\frac{1}{9},0) & f''_{yy}(-\frac{1}{9},-\frac{1}{9},0)-\lambda & f''_{yz}(-\frac{1}{9},-\frac{1}{9},0) \\ f''_{zx}(-\frac{1}{9},-\frac{1}{9},0) & f''_{zy}(-\frac{1}{9},-\frac{1}{9},0) & f''_{zz}(-\frac{1}{9},-\frac{1}{9},0)-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6e^{-\frac{2}{9}}-\lambda \end{vmatrix} = (6e^{-\frac{2}{9}}-\lambda)(\lambda^2+4\lambda+3).$$

Ponendo $\det\left(H\left(-\frac{1}{9},-\frac{1}{9},0\right)-\lambda\mathbb{I}\right) = 0$ e applicando la regola di Cartesio all'equazione $\lambda^2+4\lambda+3=0$, deduciamo che

$$\lambda_1 = 6e^{-\frac{2}{9}} > 0, \qquad \lambda_{2,3} < 0,$$

e dunque la forma quadratica è indefinita. Il punto $\left(-\frac{1}{9},-\frac{1}{9},0\right)$ è pertanto di sella per la funzione.

**2)** Se deriviamo la prima equazione rispetto a $t$ e sostituiamo al posto di $y'(t)$ la seconda equazione e al posto di $y(t) = x'(t)-x(t)-3t$, otteniamo

$$\begin{aligned} x''(t) &= x'(t)+y'(t)+3 = x'(t)+2x(t)-y(t)+2e^t+3 \\ &= x'(t)+2x(t)-x'(t)+x(t)+3t+2e^t+3 \end{aligned}$$

e dunque otteniamo l'equazioni lineare del secondo ordine completa

$$x''(t)-3x(t) = 3t+3+2e^t.$$

L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea $z^2-3=0$ ha come soluzioni $z=-\sqrt{3}, z=\sqrt{3}$ e dunque l'integrale generale della omogenea è dato da

$$x(t) = c_1e^{-\sqrt{3}t}+c_2e^{\sqrt{3}t}.$$

Determiniamo ora una soluzione particolare di $x''(t) - 3x(t) = 3t + 3 \quad \rightarrow \quad x_1(t) = -t - 1$. Determiniamo una soluzione particolare di di $x''(t) - 3x(t) = 2e^t \quad \rightarrow \quad x_2(t) = -e^t$. Pertanto risulta

$$
\begin{aligned}
x(t) &= c_1 e^{-\sqrt{3}t} + c_2 e^{\sqrt{3}t} - t - 1 - e^t \\
x'(t) &= -\sqrt{3}c_1 e^{-\sqrt{3}t} + \sqrt{3}c_2 e^{\sqrt{3}t} - 1 - e^t \\
y(t) &= x'(t) - x(t) - 3t = (-\sqrt{3} - 1)c_1 e^{-\sqrt{3}t} + (\sqrt{3} - 1)c_2 e^{\sqrt{3}t} - 2t.
\end{aligned}
$$

C

**Esonero 24 Novembre 2023**

---

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

**1)** Data la funzione

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 - 3xy + e^x \arctan(z^2), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

indicare quali affermazioni sono vere:

**(a)** il punto $(0,0,0)$ è un punto di minimo relativo per la funzione $f$;

**(b)** il punto $(1,1,0)$ è un punto di minimo relativo per la funzione $f$;

**(c)** il punto $(0,0,0)$ è un punto di sella per la funzione $f$;

**(d)** il punto $(1,1,0)$ è un punto di massimo relativo per la funzione $f$.

**2)** Risolvere il seguente di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) + 2t \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) + \sin t \end{cases}$$

---

**Svolgimento**

**1)** Risulta $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Annullando il gradiente della funzione, ovvero risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f'_x(x,y,z) = 3x^2 - 3y + e^x \arctan(z^2) = 0 \\ f'_y(x,y,z) = 3y^2 - 3x = 0 \\ f'_z(x,y,z) = e^x \frac{2z}{1+z^4} = 0 \end{cases}$$

otteniamo che i punti critici sono $(0,0,0)$ e $(1,1,0)$.
Siccome $n > 2$, per determinare la natura dei punti dobbiamo studiare il segno degli autovalori della matrice Hessiana. Le derivate seconde sono:

$$\begin{aligned}
&f''_{xx}(x,y,z) = 6x + e^x \arctan(z^2), \\
&f''_{xy}(x,y,z) = -3 = f''_{yx}(x,y,z), \\
&f''_{xz}(x,y,z) = e^x \frac{2z}{1+z^4} = f''_{zx}(x,y,z), \\
&f''_{yy}(x,y,z) = 6y, \\
&f''_{yz}(x,y,z) = 0 = f''_{zy}(x,y,z), \\
&f''_{zz}(x,y,z) = e^x \frac{2-6z^4}{(1+z^4)^2}.
\end{aligned}$$

Riguardo al punto $(0,0,0)$, otteniamo

$$\det(H(0,0,0)-\lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(0,0,0)-\lambda & f''_{xy}(0,0,0) & f''_{xz}(0,0,0) \\ f''_{yx}(0,0,0) & f''_{yy}(0,0,0)-\lambda & f''_{yz}(0,0,0) \\ f''_{zx}(0,0,0) & f''_{zy}(0,0,0) & f''_{zz}(0,0,0)-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 0 \\ -3 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2-9).$$

Ponendo $\det(H(0,0,0)-\lambda\mathbb{I})=0$ si ha che

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_{2,3} = \pm 3,$$

e dunque la forma quadratica è indefinita. Il punto $(0,0,0)$ è pertanto di sella per la funzione.
Passiamo ora a studiare il punto $(1,1,0)$. Per esso abbiamo

$$\det(H(1,1,0)-\lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(1,1,0)-\lambda & f''_{xy}(1,1,0) & f''_{xz}(1,1,0) \\ f''_{yx}(1,1,0) & f''_{yy}(1,1,0)-\lambda & f''_{yz}(1,1,0) \\ f''_{zx}(1,1,0) & f''_{zy}(1,1,0) & f''_{zz}(1,1,0)-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2e-\lambda \end{vmatrix} = (2e-\lambda)(\lambda^2-12\lambda+27).$$

Ponendo $\det(H(1,1,0)-\lambda\mathbb{I})=0$ e applicando la regola di Cartesio all'equazione $\lambda^2-12\lambda+27=0$, deduciamo che

$$\lambda_1 = 2e > 0, \qquad \lambda_{2,3} > 0,$$

e dunque la forma quadratica è definita positiva. Il punto $(1,1,0)$ è pertanto di minimo relativo per la funzione.

**2)** Se deriviamo la prima equazione rispetto a $t$ e sostituiamo al posto di $y'(t)$ la seconda equazione e al posto di $2y(t) = x'(t) - x(t) - 2t$, otteniamo

$$\begin{aligned} x''(t) &= x'(t) + 2y'(t) + 2 = x'(t) + 4x(t) + 2y(t) + 2\sin t + 2 \\ &= x'(t) + 4x(t) + x'(t) - x(t) - 2t + 2\sin t + 2 \end{aligned}$$

e dunque otteniamo l'equazione lineare del secondo ordine completa

$$x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = -2t + 2 + 2\sin t.$$

L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea $z^2 - 2z - 3 = 0$ ha come soluzioni $z = 3, z = -1$ e dunque l'integrale generale della omogenea è dato da

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}.$$

Determiniamo ora una soluzione particolare di $x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = -2t + 2 \quad \rightarrow$ $x_1(t) = \dfrac{2}{3}t - \dfrac{10}{9}$.

Determiniamo una soluzione particolare di di $x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = 2\sin t \quad \rightarrow \quad x_2(t) = \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t$. Pertanto risulta

$$\begin{aligned}
x(t) &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + \frac{2}{3}t - \frac{10}{9} + \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t \\
x'(t) &= -c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{3t} + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\sin t - \frac{2}{5}\cos t \\
y(t) &= \frac{1}{2}\big(x'(t) - x(t) - 2t\big) = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + \frac{1}{10}\sin t - \frac{3}{10}\cos t - \frac{4}{3}t + \frac{8}{9}.
\end{aligned}$$

**D**

**Esonero 24 Novembre 2023**

---

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

**1)** Data la funzione

$$f(x,y,z) = 2x^3 + 2y^3 + xy - e^{-x}\ln(1+2z^2), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

indicare quali affermazioni sono vere:

**(a)** il punto $(0,0,0)$ è un punto di sella per la funzione $f$;

**(b)** il punto $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0)$ è un punto di massimo relativo per la funzione $f$;

**(c)** il punto $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0)$ è un punto di minimo relativo per la funzione $f$;

**(d)** il punto $(0,0,0)$ è un punto di minimo relativo per la funzione $f$;

**2)** Risolvere il seguente di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 4y(t) + t \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t) + \cos(2t) \end{cases}$$

---

**Svolgimento**

**1)** Risulta $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Annullando il gradiente della funzione, ovvero risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f'_x(x,y,z) = 6x^2 + y + e^{-x}\ln(1+2z^2) = 0 \\ f'_y(x,y,z) = 6y^2 + x = 0 \\ f'_z(x,y,z) = -e^{-x}\frac{4z}{1+2z^2} = 0 \end{cases}$$

otteniamo che i punti critici sono $(0,0,0)$ e $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0)$.
Siccome $n > 2$, per determinare la natura dei punti dobbiamo studiare il segno degli autovalori della matrice Hessiana. Le derivate seconde sono:

$$\begin{aligned}
&f''_{xx}(x,y,z) = 12x - e^{-x}\ln(1+2z^2), \\
&f''_{xy}(x,y,z) = 1 = f''_{yx}(x,y,z), \\
&f''_{xz}(x,y,z) = e^{-x}\frac{4z}{1+2z^2} = f''_{zx}(x,y,z), \\
&f''_{yy}(x,y,z) = 12y, \\
&f''_{yz}(x,y,z) = 0 = f''_{zy}(x,y,z), \\
&f''_{zz}(x,y,z) = -e^{-x}\frac{4-8z^2}{(1+2z^2)^2}.
\end{aligned}$$

Riguardo al punto $(0,0,0)$, otteniamo

$$\det(H(0,0,0)-\lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(0,0,0)-\lambda & f''_{xy}(0,0,0) & f''_{xz}(0,0,0) \\ f''_{yx}(0,0,0) & f''_{yy}(0,0,0)-\lambda & f''_{yz}(0,0,0) \\ f''_{zx}(0,0,0) & f''_{zy}(0,0,0) & f''_{zz}(0,0,0)-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (-4-\lambda)(\lambda^2-1).$$

Ponendo $\det(H(0,0,0)-\lambda\mathbb{I}) = 0$ si ha che

$$\lambda_1 = -4, \qquad \lambda_{2,3} = \pm 1,$$

e dunque la forma quadratica è indefinita. Il punto $(0,0,0)$ è pertanto di sella per la funzione.
Passiamo ora a studiare il punto $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0)$. Per esso abbiamo

$$\det\left(H\left(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},0\right)-\lambda\mathbb{I}\right) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},0)-\lambda & f''_{xy}(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},0) & f''_{xz}(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},0) \\ f''_{yx}(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},0) & f''_{yy}(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},0)-\lambda & f''_{yz}(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},0) \\ f''_{zx}(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},0) & f''_{zy}(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},0) & f''_{zz}(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},0)-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -4e^{\frac{1}{6}}-\lambda \end{vmatrix} = (-4e^{\frac{1}{6}}-\lambda)(\lambda^2+4\lambda+3).$$

Ponendo $\det\left(H\left(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},0\right)-\lambda\mathbb{I}\right) = 0$ e applicando la regola di Cartesio al polinomio $\lambda^2+4\lambda+3=0$, deduciamo che

$$\lambda_1 = -4e^{\frac{1}{6}} < 0, \qquad \lambda_{2,3} < 0,$$

e dunque la forma quadratica è definita negativa. Il punto $\left(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},0\right)$ è pertanto di massimo relativo per la funzione.

**2)** Se deriviamo la prima equazione rispetto a $t$ e sostituiamo al posto di $y'(t)$ la seconda equazione e al posto di $4y(t) = x'(t) + x(t) - t$, otteniamo

$$\begin{aligned} x''(t) &= -x'(t) + 4y'(t) + 1 = -x'(t) - 4x(t) + 12y(t) + 4\cos(2t)t + 1 \\ &= 2x'(t) - x(t) - 3t + 1 + 4\cos(2t) \end{aligned}$$

e dunque otteniamo l'equazioni lineare del secondo ordine completa

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = -3t + 1 + 4\cos(2t).$$

L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea $z^2 - 2z + 1 = 0$ ha come soluzioni $z = 1$ con molteplicità 2 e dunque l'integrale generale della omogenea è dato da

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t.$$

Determiniamo ora una soluzione particolare di $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = -3t + 1 \quad \rightarrow \quad x_1(t) = -3t - 5$.
Determiniamo una soluzione particolare di di $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 4\cos(2t) \quad \rightarrow \quad x_2(t) = -\frac{12}{25}\cos(2t) - \frac{16}{25}\sin(2t)$. Pertanto risulta

$$
\begin{aligned}
x(t) &= c_1 e^t + c_2 t e^t - 3t - 5 - \frac{12}{25}\cos(2t) - \frac{16}{25}\sin(2t) \\
x'(t) &= c_1 e^t + c_2 e^t + c_2 t e^t - 3 + \frac{24}{25}\sin(2t) - \frac{32}{25}\cos(2t) \\
y(t) &= \frac{1}{4}\big(x'(t) + x(t) - t\big) = \frac{1}{2}c_1 e^t + \frac{1}{4}c_2 e^t + \frac{1}{2}c_2 t e^t - t - 2 + \frac{2}{25}\sin(2t) - \frac{11}{25}\cos(2t).
\end{aligned}
$$

**A**

**Esonero 19 Dicembre 2023** iscritto al secondo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: ____________ Cognome ____________________ Matr. __________

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

**1)** Data la forma differenziale lineare $\omega = \Big(\dfrac{xy^2}{1+x^2y^2}+y\Big)dx+\Big(\dfrac{x^2y}{1+x^2y^2}+3\Big)dy$ calcolare, $\int_\gamma \omega$, quando $\gamma$ è la porzione di ellisse $x^2+4y^2=4$, contenuta nel semipiano $y \geq 0$.

**2)** Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq (|x|-1)^2, |x| \leq 1\}$, scrivere le equazioni parametriche della sua frontiera e calcolare l'ascissa $x_G$ del baricentro quando la densità è pari a $f(x,y) = |x|+x$.

**3)** Sia $\Sigma$ la superficie parametrizzata da $S(u,v) = (u+v, u-v, u^2v)$, $(u,v) \in [-2,2]^2$. Dopo aver provato che $S$ è regolare, determinare il vettore normale nel punto $S(0,1)$.

## Svolgimento

**1)** La forma differenziale $\omega$ è data dalla somma di

$$\bar{\omega} = \Big(\frac{xy^2}{1+x^2y^2}\Big)dx + \Big(\frac{x^2y}{1+x^2y^2}+3\Big)dy,$$

che è esatta, e della forma $ydx$. Facciamo vedere che $\bar{\omega}$ è chiusa. Posto $X = \dfrac{xy^2}{1+x^2y^2}$ e $Y = \dfrac{x^2y}{1+x^2y^2}+3$, si ha che $X, Y \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{2xy}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Pertanto, essendo il dominio un insieme convesso, possiamo concludere che $\bar{\omega}$ è esatta. Determiniamo ora una primitiva $U$. Deve risultare $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \frac{xy^2}{1+x^2y^2}$ da cui

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2y^2) + h(y),$$

con $h \in C^1(\mathbb{R})$. Inoltre deve anche risultare

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x^2y}{1+x^2y^2} + h'(y) = \frac{x^2y}{1+x^2y^2} + 3 \quad \Longleftrightarrow \quad h(y) = 3y + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Pertanto la classe delle primitive della forma differenziale $\bar{\omega}$ è data da $U(x,y) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2y^2) + 3y + c, \quad c \in \mathbb{R}$. L'integrale curvilineo pertanto non dipende dal percorso ma solo dagli estremi della curva e dal verso di percorrenza e dunque

$$\int_\gamma \bar{\omega} = U(-2,0) - U(2,0) = 0.$$

Per quanto riguarda invece $\int_\gamma y dx$, questo integrale va calcolato direttamente. Una rappresentazione parametrica della semi-ellisse è data da $\gamma(t) = (2\cos t, \sin t), \quad 0 \le t \le \pi$. Dunque

$$\int_\gamma y\ dx = \int_0^\pi \sin t(-2\sin t)\ dt = -2\int_0^\pi \sin^2 t\ dt = -\left[t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^\pi = -\pi.$$

In definitiva quindi

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \bar{\omega} + \int_\gamma y\ dx = -\pi.$$

**2)** Osservando che

$$|y| \le (|x|-1)^2 \iff -(|x|-1)^2 \le y \le (|x|-1)^2,$$

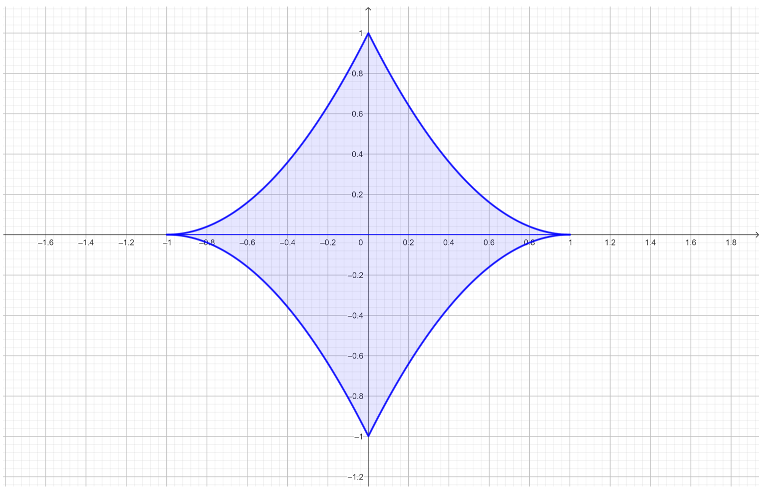
l'insieme $D$ può essere scritto come

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1, -x^2 + 2|x| - 1 \le y \le x^2 - 2|x| + 1\}.$$

Risulta allora

$$\begin{aligned} -x^2 - 2x - 1 \le y \le x^2 + 2x + 1, &\quad \text{se } -1 \le x < 0 \\ -x^2 + 2x - 1 \le y \le x^2 - 2x + 1, &\quad \text{se } 0 \le x \le 1. \end{aligned}$$

L'insieme $D$ richiesto è rappresentato dalla regione colorata nella seguente figura. Pertanto



$Fr\ D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, ove

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 - 2t + 1 \quad 1 \ge t \ge 0\ ; \end{cases} \qquad \gamma_2 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 + 2t + 1 \quad 0 \ge t \ge -1\ ; \end{cases}$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -t^2 - 2t - 1 \quad -1 \le t \le 0\ ; \end{cases} \qquad \gamma_4 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -t^2 + 2t - 1 \quad 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Calcoliamo la massa dell'insieme $D$

$$m(D) = \iint_D (|x| + x)\ dxdy = 2\iint_{\tilde{D}} x\ dxdy$$

ove $\tilde{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad -(x-1)^2 \leq y \leq (x-1)^2\}$.
Dal teorema di riduzione si ha

$$\begin{aligned} 2\iint_{\tilde{D}} x\ dxdy &= 2\int_0^1 x\ dx \int_{-(x-1)^2}^{(x-1)^2} dy = 4\int_0^1 x(x^2 - 2x + 1)\ dx \\ &= 4\int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)\ dx = 4\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Risulta allora che le coordinate del baricentro sono

$$x_G = \frac{1}{m(D)}\iint_D x(|x| + x)\ dxdy = 6\iint_{\tilde{D}} x^2\ dxdy = 6\int_0^1 x^2\ dx \int_{-(x-1)^2}^{(x-1)^2} dy$$

$$= 12\int_0^1 x^2(x^2 - 2x + 1)\ dx = 12\int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2)\ dx = 12\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{5},$$

$$y_G = \frac{1}{m(D)}\iint_D y(|x| + x)\ dxdy = 6\iint_{\tilde{D}} xy\ dxdy = 6\int_0^1 x\ dx \int_{-(x-1)^2}^{(x-1)^2} y\ dy$$

$$= 6\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-(x-1)^2}^{(x-1)^2} dx = 0.$$

**3)** La parametrizzazione di $\Sigma$ è

$$r : [-2, 2]^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad r(u, v) = \begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = u^2 v \end{cases} \qquad r \in C^1([-2, 2]^2).$$

La matrice Jacobiana di $\Sigma$ è

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2uv \\ 1 & -1 & u^2 \end{bmatrix}, \quad (u, v) \in [-2, 2]^2$$

e ha rango 2, in quanto risulta

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,\ (u, v) \in [-2, 2]^2.$$

Pertanto, possiamo concludere che la superficie è regolare.
Il vettore normale è

$$\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2uv \\ 1 & -1 & u^2 \end{vmatrix} = (u^2 + 2uv)\vec{i} + (2uv - u^2)\vec{j} + (-2)\vec{k}, \quad (u, v) \in [-2, 2]^2$$

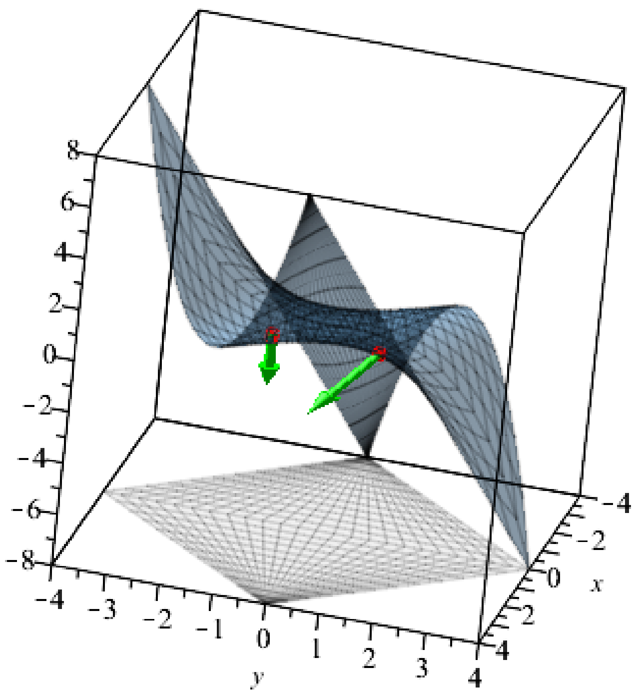
da cui

$$\left(\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}\right)(0, 1) = (0, 0, -2).$$

Al fine di dare una rappresentazione grafica della superficie $\Sigma$, osserviamo che

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = u^2 v \end{cases} \quad , \ (u,v) \in [-2,2]^2 \iff \begin{cases} u = \dfrac{x+y}{2} \\ v = \dfrac{x-y}{2} \\ z = \dfrac{(x+y)^2}{4} \cdot \dfrac{x-y}{2} \end{cases} \quad , \ (x,y) \in R,$$

ovvero la superficie $\Sigma$ coincide con il grafico della funzione $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{4} \cdot \dfrac{x-y}{2}$, definita in $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| \leq 4, |x-y| \leq 4\}$ e rappresentata in Figura 1.



**B**

**Esonero 19 Dicembre 2023** iscritto al secondo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: ______ Cognome ______ Matr. ______

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

**1)** Data la forma differenziale lineare $\omega = \left(\frac{xy^2}{1+x^2y^2}\right)dx + \left(\frac{x^2y}{1+x^2y^2}+3+x\right)dy$ calcolare, $\int_\gamma \omega$, quando $\gamma$ è la porzione di ellisse $x^2+4y^2=4$, contenuta nel semipiano $y \geq 0$.

**2)** Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq (|x|-1)^2, |x| \leq 1\}$, scrivere le equazioni parametriche della sua frontiera e calcolare l'ordinata $y_G$ del baricentro quando la densità è pari a $f(x,y) = |x| + x$.

**3)** Sia $\Sigma$ la superficie parametrizzata da $S(u,v) = (u-v, u+v, u^2v)$, $(u,v) \in [-2,2]^2$. Dopo aver provato che $S$ è regolare, determinare il vettore normale nel punto $S(0,1)$.

## Svolgimento

**1)** La forma differenziale $\omega$ è data dalla somma di

$$\bar{\omega} = \left(\frac{xy^2}{1+x^2y^2}\right)dx + \left(\frac{x^2y}{1+x^2y^2}+3\right)dy,$$

che è esatta (vedi esercizio 1A), e della forma $xdy$. Esattamente come in 1A $\int_\gamma \bar{\omega} = 0$. Per quanto riguarda invece $\int_\gamma xdy$, questo integrale va calcolato direttamente. Una rappresentazione parametrica della semi-ellisse è data da $\gamma(t) = (2\cos t, \sin t)$, $\quad 0 \leq t \leq \pi$. Dunque

$$\int_\gamma x\ dy = \int_0^\pi 2\cos t(\cos t)\ dt = 2\int_0^\pi \cos^2 t\ dt = \left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^\pi = \pi.$$

In definitiva quindi

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \bar{\omega} + \int_\gamma x\ dy = \pi.$$

**2)** Vedi esercizio 2A.

**3)** La parametrizzazione di $\Sigma$ è

$$r : [-2,2]^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad r(u,v) = \begin{cases} x = u - v \\ y = u + v \\ z = u^2 v \end{cases}, \quad r \in C^1([-2,2]^2).$$

La matrice Jacobiana di $\Sigma$ è

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2uv \\ -1 & 1 & u^2 \end{bmatrix}, \ (u,v) \in [-2,2]^2$$

e ha rango 2, in quanto risulta

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \ (u,v) \in [-2,2]^2.$$

Pertanto, possiamo concludere che la superficie è regolare. Il vettore normale è

$$\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2uv \\ -1 & 1 & u^2 \end{vmatrix} = (u^2 - 2uv)\vec{i} + (-u^2 - 2uv)\vec{j} + 2\vec{k}, \ (u,v) \in [-2,2]^2,$$

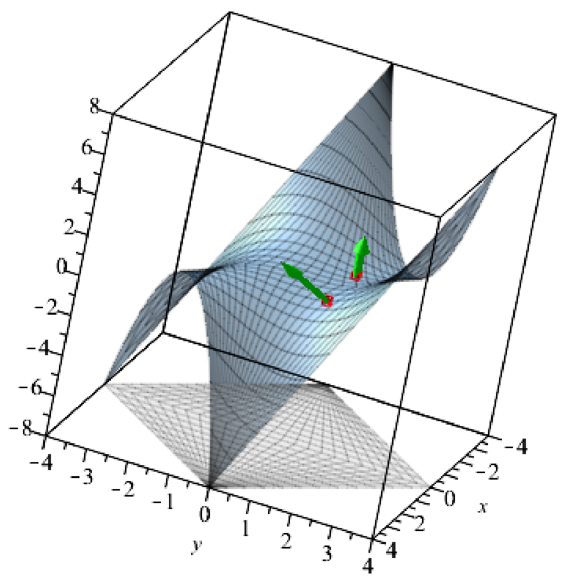
da cui

$$\left(\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}\right)(0,1) = (0,0,2).$$

Al fine di dare una rappresentazione grafica della superficie $\Sigma$, osserviamo che

$$\begin{cases} x = u - v \\ y = u + v \\ z = u^2 v \end{cases}, \ (u,v) \in [-2,2]^2 \iff \begin{cases} u = \dfrac{x+y}{2} \\ v = \dfrac{y-x}{2} \\ z = \dfrac{(y-x)(x+y)^2}{8} \end{cases}, \ (x,y) \in R,$$

ovvero la superficie $\Sigma$ coincide con il grafico della funzione $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{4} \cdot \dfrac{y-x}{2}$, definita in $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| \leq 4, |y-x| \leq 4\}$ e rappresentata in Figura 2.



C

**Esonero 19 Dicembre 2023** iscritto al secondo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: ____________ Cognome ____________________ Matr. __________

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

**1)** Data la forma differenziale lineare $\omega = \left(\frac{xy^2}{1+x^2y^2} + y\right)dx + \left(\frac{x^2y}{1+x^2y^2} + 3\right)dy$ calcolare, $\int_\gamma \omega$, quando $\gamma$ è la porzione di ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$, contenuta nel semipiano $y \geq 0$.

**2)** Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq (|x|-1)^2, |x| \leq 1\}$, scrivere le equazioni parametriche della sua frontiera e calcolare l'ascissa $x_G$ del baricentro quando la densità è pari a $f(x,y) = |x| + x$.

**3)** Sia $\Sigma$ la superficie parametrizzata da $S(u,v) = (u+v, u-v, u^2v)$, $(u,v) \in [-2,2]^2$. Dopo aver provato che $S$ è regolare, determinare il vettore normale nel punto $S(1,0)$.

**Svolgimento**

**1)** Vedi esercizio 1A.

**2)** Vedi esercizio 2A.

**3)** Per la prima parte dell'esercizio, si veda esercizio 3A. Il vettore normale nel punto richiesto è in questo caso

$$\left(\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}\right)(1,0) = (1,-1,-2),$$

vedi anche Figura 1.

# D

**Esonero 19 Dicembre 2023** iscritto al secondo anno di corso SI NO BES/DSA ☐

Nome: ____________ Cognome ____________________ Matr. __________

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

**1)** Data la forma differenziale lineare $\omega = \left(\dfrac{xy^2}{1+x^2y^2}\right)dx + \left(\dfrac{x^2y}{1+x^2y^2} + 3 + x\right)dy$ calcolare, $\int_\gamma \omega$, quando $\gamma$ è la porzione di ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$, contenuta nel semipiano $y \geq 0$.

**2)** Disegnare l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq (|x| - 1)^2, |x| \leq 1\}$, scrivere le equazioni parametriche della sua frontiera e calcolare l'ordinata $y_G$ del baricentro quando la densità è pari a $f(x, y) = |x| + x$.

**3)** Sia $\Sigma$ la superficie parametrizzata da $S(u, v) = (u - v, u + v, u^2v)$, $(u, v) \in [-2, 2]^2$. Dopo aver provato che $S$ è regolare, determinare il vettore normale nel punto $S(1, 0)$.

## Svolgimento

**1)** Vedi esercizio 1B.

**2)** Vedi esercizio 2A.

**3)** Per la prima parte dell'esercizio, si veda esercizio 3B. Il vettore normale nel punto richiesto è in questo caso

$$\left(\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}\right)(1, 0) = (1, -1, 2),$$

vedi anche Figura 2.

Analisi Matematica II - A.A. 2023/2024 - CdS Ingegneria Civile e Meccanica

**A**

**Esonero 26 Marzo 2024** Civile ☐ Meccanica ☐ BES/DSA ☐

---

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

**1)** Determinare massimi e minimi relativi della funzione $f(x,y,z) = z^2(z-3) + (x-1)^2 - \cos y$. **[punti 12]**

**2)** Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da: $F(x,y) = \dfrac{xy^4}{x^2+y^6}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $F(0,0) = 0$.
Siano $x(t) = t^3$, $y(t) = t$. Quali delle seguente affermazioni sono corrette:

$\alpha$) $F$ ammette gradiente nell'origine $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

$\beta$) $\nabla F(0,0) = (0,0)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

$\gamma$) $G(t) := F(x(t), y(t))$ è derivabile nell'origine e $G'(0) = \nabla F(0,0) \cdot (x'(0), y'(0))$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

$\delta$) $F$ è differenziabile in $(0,0)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

$\varepsilon$) $F$ è continua in $(0,0)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(Selezionare le risposte esatte e motivarle **[12 punti]**)

**3)** Sia $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1$. Determinare i punti di massimo e di minimo assoluti di $f$ nell'insieme $B = \{(x,y) : x^2+y^2 = 9\}$. **[punti 6]**

---

## Svolgimento

**1)** Risulta $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ quindi i punti di massimo o di minimo relativo devono annullare il gradiente di $f$.

$$\begin{cases} 2(x-1) = 0 \\ \sin y = 0 \\ 3z(z-2) = 0 \end{cases} \iff (x,y,z) = (1, k\pi, 0);\ (x,y,z) = (1, k\pi, 2) \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Calcoliamo ora le derivate seconde

$$f''_{xx}(x,y,z) = 2, \quad f''_{xy}(x,y,z) = 0 = f''_{yx}(x,y,z), \quad f''_{xz}(x,y,z) = 0 = f''_{zx}(x,y,z)$$
$$f''_{yy}(x,y,z) = \cos y, \quad f''_{yz}(x,y,z) = 0 = f''_{zy}(x,y,z), \quad f''_{zz}(x,y,z) = 6z - 6.$$

$$H(x,y,z)-\lambda\mathbb{I}=\begin{pmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & \cos y-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 6(z-1)-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\det\Big(H(1,k\pi,0)-\lambda\mathbb{I}\Big)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & (-1)^k-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -6-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)((-1)^k-\lambda)(-6-\lambda)=0$$

$\lambda_1=2,\ \lambda_2=(-1)^k,\ \lambda_3=-6\quad(1,k\pi,0)$ punti sella per ogni $k\in\mathbb{Z}$

$$\det\Big(H(1,k\pi,2)-\lambda\mathbb{I}\Big)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & (-1)^k-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 6-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)((-1)^k-\lambda)(6-\lambda)=0$$

$\lambda_1=2,\ \lambda_2=(-1)^k,\ \lambda_3=6$

$k=2n\quad(1,2n\pi,2)$ punti di minimo relativo per ogni $n\in\mathbb{Z}$

$k=2n+1\quad(1,(2n+1)\pi,2)$ punti sella per ogni $n\in\mathbb{Z}$

**2)** $F$ ammette gradiente nell'origine, infatti

$$\forall h\neq 0\quad \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0,\qquad \forall k\neq 0\quad \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=0$$
$$\Longrightarrow \nabla F(0,0)=(0,0)$$

Per studiare la derivabilità di $G$ osserviamo che

$$G(t)=F(t^3,t)=\begin{cases}\dfrac{t^7}{2t^6}=\dfrac{t}{2} & t\neq 0\\ 0 & t=0\end{cases}$$

Dunque

$$G'(0)=\lim_{t\to0}\frac{G(t)-G(0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{t/2}{t}=\frac{1}{2}\neq\nabla F(0,0)\cdot(0,1)=0.$$

Ne deriva che $F$ non è differenziabile in $(0,0)$.
Per studiare la continuità di $F$ in $(0,0)$ portiamo innanzitutto gli esponenti a denominatore allo stesso valore. Poniamo allora $x=t^3$, $y=w$. Dobbiamo allora calcolare

$$\lim_{(t,w)\to(0,0)}\frac{t^3w^4}{t^6+w^6}.$$

Passiamo a coordinate polari $t=r\cos\theta$, $w=r\sin\theta$ e consideriamo il valore assoluto della funzione.

$$\lim_{r\to0}\frac{r^7|\cos^3\theta\sin^4\theta|}{r^6(\cos^6\theta+\sin^6\theta)}\leq\lim_{r\to0}\frac{r}{(\cos^6\theta+\sin^6\theta)}.$$

Sia $g(\theta)=\cos^6\theta+\sin^6\theta$. Proviamo che il suo minimo assoluto è strettamente positivo.

$$\begin{aligned}g'(\theta)&=-6\cos^5\theta\sin\theta+6\sin^5\theta\cos\theta=6\sin\theta\cos\theta(\sin^4\theta-\cos^4\theta)=\\&=6\sin\theta\cos\theta(\sin^2\theta-\cos^2\theta)=6\sin\theta\cos\theta(2\sin^2\theta-1)\end{aligned}$$

Se risolviamo $g'(\theta) \geq 0$ otteniamo che i punti di minimo assoluto sono raggiunti nei punti $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$. Allora $g(\theta) \geq g(\pi/4) = 1/4$ e dunque

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^7|\cos^3\theta \sin^4\theta|}{r^6(\cos^6\theta + \sin^6\theta)} \leq \lim_{r\to 0} \frac{r}{(\cos^6\theta + \sin^6\theta)} \leq \lim_{r\to 0} 4r = 0,$$

uniformemente in $\theta$. Pertanto $F$ è continua in $(0,0)$.

**3)** L'insieme $B$ è un compatto (è la circonferenza di centro l'origine e raggio 3). La funzione $f$ è continua in $B$ e quindi per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti. Sia $g(y) = 3 + y^2 - 1 = 2 + y^2$; $g : [-3,3] \to \mathbb{R}$. La funzione $g$ ha un minimo assoluto in $y = 0$ e due massimi assoluti per $y = \pm 3$. Allora la funzione $f$ ammetterà minimo assoluto in $(\pm 3, 0)$ e massimo assoluto in $(0, \pm 3)$.
Metodo alternativo: $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ , $B$ è un compatto di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dunque per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti. Determiniamo i candidati con il metodo dello Jacobiano:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ \begin{vmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ -4xy = 0 \end{cases} \iff (\pm 3, 0),\ (0, \pm 3)$$

che sono esattamente i candidati individuati con il primo metodo.
Se vogliamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange osserviamo che $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$, $Z_g \cap (\nabla g = (0,0)) = \emptyset$. Posto $F(x,y,a) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1 + a(x^2 + y^2 - 9)$ risulta $\nabla F = (0,0,0)$ se e solo se

$$\begin{cases} x\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2a\Big) = 0 \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y + 2ay = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y + 2ay = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \cup$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2a = 0 \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y + 2ay = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Dal primo sistema si ottiene $(0, \pm 3)$ dal secondo $(\pm 3, 0)$.

B

**Esonero 26 Marzo 2024** Civile ☐ Meccanica ☐ BES/DSA ☐

---

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

**1)** Determinare massimi e minimi relativi della funzione $f(x, y, z) = y^2(y-3) + (x-1)^2 - \cos z$. **[punti 12]**

**2)** Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da: $F(x, y) = \dfrac{x^4 y}{x^6 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $F(0, 0) = 0$.
Siano $x(t) = t$, $y(t) = t^3$. Quali delle seguente affermazioni sono corrette:

$\alpha$) $F$ ammette gradiente nell'origine V F

$\beta$) $\nabla F(0, 0) = (0, 0)$ V F

$\gamma$) $G(t) := F(x(t), y(t))$ è derivabile nell'origine e $G'(0) = \nabla F(0, 0) \cdot (x'(0), y'(0))$ V F

$\delta$) $F$ è differenziabile in $(0, 0)$ V F

$\varepsilon$) $F$ è continua in $(0, 0)$ V F

(Selezionare le risposte esatte e motivarle **[12 punti]**)

**3)** Sia $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + 2x^2 + 1$. Determinare i punti di massimo e di minimo assoluti di $f$ nell'insieme $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$. **[punti 6]**

---

## Svolgimento

**1)** Risulta $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ quindi i punti di massimo o di minimo relativo devono annullare il gradiente di $f$.

$$\begin{cases} 2(x-1) = 0 \\ 3y(y-2) = 0 \\ \sin z = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = (1, 0, k\pi);\ (x, y, z) = (1, 2, k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Calcoliamo ora le derivate seconde

$$f''_{xx}(x, y, z) = 2, \quad f''_{xy}(x, y, z) = 0 = f''_{yx}(x, y, z), \quad f''_{xz}(x, y, z) = 0 = f''_{zx}(x, y, z)$$
$$f''_{yy}(x, y, z) = 6y - 6, \quad f''_{yz}(x, y, z) = 0 = f''_{zy}(x, y, z), \quad f''_{zz}(x, y, z) = \cos z.$$

$$H(x,y,z)-\lambda\mathbb{I}=\begin{pmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 6(y-1)-\lambda & 0\\ 0 & 0 & \cos z-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\det\Big(H(1,0,k\pi)-\lambda\mathbb{I}\Big)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -6-\lambda & 0\\ 0 & 0 & (-1)^k-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(-6-\lambda)((-1)^k-\lambda)=0$$

$\lambda_1=2,\ \lambda_2=-6,\ \lambda_3=(-1)^k\quad (1,0,k\pi)$ punti sella per ogni $k\in\mathbb{Z}$

$$\det\Big(H(1,2,k\pi)-\lambda\mathbb{I}\Big)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 6-\lambda & 0\\ 0 & 0 & (-1)^k-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(6-\lambda)((-1)^k-\lambda)=0$$

$\lambda_1=2,\ \lambda_2=6,\ \lambda_3=(-1)^k$

$k=2n\quad (1,2,2n\pi)$ punti di minimo relativo per ogni $n\in\mathbb{Z}$

$k=2n+1\quad (1,2,(2n+1)\pi)$ punti sella per ogni $n\in\mathbb{Z}$

**2)** $F$ ammette gradiente nell'origine, infatti

$$\forall h\neq 0\quad \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0,\qquad \forall k\neq 0\quad \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=0$$
$$\Longrightarrow \nabla F(0,0)=(0,0)$$

Per studiare la derivabilità di $G$ osserviamo che

$$G(t)=F(t,t^3)=\begin{cases}\dfrac{t^7}{2t^6}=\dfrac{t}{2} & t\neq 0\\[2ex] 0 & t=0\end{cases}$$

Dunque

$$G'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{G(t)-G(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t/2}{t}=\frac{1}{2}\neq\nabla F(0,0)\cdot(1,0)=0.$$

Ne deriva che $F$ non è differenziabile in $(0,0)$.
Per studiare la continuità di $F$ in $(0,0)$ portiamo innanzitutto gli esponenti a denominatore allo stesso valore. Poniamo allora $x=w,\ y=t^3$. Dobbiamo allora calcolare

$$\lim_{(w,t)\to(0,0)}\frac{w^4t^3}{w^6+t^6}.$$

Passiamo a coordinate polari $w=r\cos\theta$, $t=r\sin\theta$ e consideriamo il valore assoluto della funzione.

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^7|\cos^4\theta\sin^3\theta|}{r^6(\cos^6\theta+\sin^6\theta)}\leq\lim_{r\to 0}\frac{r}{(\cos^6\theta+\sin^6\theta)}.$$

Sia $g(\theta)=\cos^6\theta+\sin^6\theta$. Proviamo che il suo minimo assoluto è strettamente positivo.

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= -6\cos^5\theta\sin\theta+6\sin^5\theta\cos\theta=6\sin\theta\cos\theta(\sin^4\theta-\cos^4\theta)=\\ &= 6\sin\theta\cos\theta(\sin^2\theta-\cos^2\theta)=6\sin\theta\cos\theta(2\sin^2\theta-1)\end{aligned}$$

Se risolviamo $g'(\theta) \geq 0$ otteniamo che i punti di minimo assoluto sono raggiunti nei punti $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$. Allora $g(\theta) \geq g(\pi/4) = 1/4$ e dunque

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^7 |\cos^4\theta \sin^3\theta|}{r^6(\cos^6\theta + \sin^6\theta)} \leq \lim_{r\to 0} \frac{r}{(\cos^6\theta + \sin^6\theta)} \leq \lim_{r\to 0} 4r = 0,$$

uniformemente in $\theta$. Pertanto $F$ è continua in $(0,0)$.

**3)** L'insieme $B$ è un compatto (è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2). La funzione $f$ è continua in $B$ e quindi per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti. Sia $g(x) = 2 + 2x^2 + 1 = 3 + 2x^2$; $g : [-2,2] \to \mathbb{R}$. La funzione $g$ ha un minimo assoluto in $x = 0$ e due massimi assoluti per $x = \pm 2$. Allora la funzione $f$ ammetterà minimo assoluto in $(0, \pm 2)$ e massimo assoluto in $(\pm 2, 0)$.
Metodo alternativo: $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ , $B$ è un compatto di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dunque per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti. Determiniamo i candidati con il metodo dello Jacobiano:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ \begin{vmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 4x & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 8xy = 0 \end{cases} \iff (0, \pm 2),\ (\pm 2, 0)$$

che sono esattamente i candidati individuati con il primo metodo.
Se vogliamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange osserviamo che $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$, $Z_g \cap (\nabla g = (0,0)) = \emptyset$. Posto $F(x,y,a) = \sqrt{x^2+y^2} + 2x^2 + 1 + a(x^2 + y^2 - 4)$ risulta $\nabla F = (0,0,0)$ se e solo se

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 4x + 2ax = 0 \\ y\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2a\Big) = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 4x + 2ax = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \cup \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 4x + 2ax = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2a = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Dal primo sistema si ottiene $(\pm 2, 0)$ dal secondo $(0, \pm 2)$.

C

**Esonero 26 Marzo 2024** Civile ☐ Meccanica ☐ BES/DSA ☐

---

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

**1)** Determinare massimi e minimi relativi della funzione $f(x,y,z) = x^2(x-3)+(z-1)^2-\cos y$. **[punti 12]**

**2)** Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da: $F(x,y) = \dfrac{xy^4}{x^2+y^6}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $F(0,0) = 0$.
Siano $x(t) = t^3$, $y(t) = t$. Quali delle seguente affermazioni sono corrette:

$\alpha$) $F$ è continua in $(0,0)$ V F

$\beta$) $F$ ammette gradiente nell'origine V F

$\gamma$) $\nabla F(0,0) = (1,0)$ V F

$\delta$) $F$ è differenziabile in $(0,0)$ V F

$\varepsilon$) $G(t) := F(x(t),y(t))$ è derivabile nell'origine e $G'(0) = \nabla F(0,0)\cdot(x'(0),y'(0))$ V F

(Selezionare le risposte esatte e motivarle) **[12 punti]**)

**3)** Sia $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}+x^2-1$. Determinare i punti di massimo e di minimo assoluti di $f$ nell'insieme $B = \{(x,y) : x^2+y^2 = 16\}$. **[punti 6]**

---

## Svolgimento

**1)** Risulta $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ quindi i punti di massimo o di minimo relativo devono annullare il gradiente di $f$.

$$\begin{cases} 3x(x-2)=0 \\ \sin y = 0 \\ 2(z-1)=0 \end{cases} \iff (x,y,z) = (0,k\pi,1);\ (x,y,z) = (2,k\pi,1) \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Calcoliamo ora le derivate seconde

$$f''_{xx}(x,y,z) = 6x-6, \quad f''_{xy}(x,y,z) = 0 = f''_{yx}(x,y,z), \quad f''_{xz}(x,y,z) = 0 = f''_{zx}(x,y,z)$$
$$f''_{yy}(x,y,z) = \cos y, \quad f''_{yz}(x,y,z) = 0 = f''_{zy}(x,y,z), \quad f''_{zz}(x,y,z) = 2.$$

$$H(x,y,z)-\lambda\mathbb{I}=\begin{pmatrix}6(x-1)-\lambda & 0 & 0\\ 0 & \cos y-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\det\Big(H(0,k\pi,1)-\lambda\mathbb{I}\Big)=\begin{vmatrix}-6-\lambda & 0 & 0\\ 0 & (-1)^k-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(-6-\lambda)((-1)^k-\lambda)(2-\lambda)=0$$

$\lambda_1=-6$, $\lambda_2=(-1)^k$, $\lambda_3=2$ $\quad(0,k\pi,1)$ punti sella per ogni $k\in\mathbb{Z}$

$$\det\Big(H(2,k\pi,1)-\lambda\mathbb{I}\Big)=\begin{vmatrix}6-\lambda & 0 & 0\\ 0 & (-1)^k-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(6-\lambda)((-1)^k-\lambda)(2-\lambda)=0$$

$\lambda_1=6$, $\lambda_2=(-1)^k$, $\lambda_3=2$

$k=2n$ $\quad(2,2n\pi,1)$ punti di minimo relativo per ogni $n\in\mathbb{Z}$

$k=2n+1$ $\quad(2,(2n+1)\pi,1)$ punti sella per ogni $n\in\mathbb{Z}$

**2)** Vedi esercizio 2 Compito A.

**3)** L'insieme $B$ è un compatto (è la circonferenza di centro l'origine e raggio 4). La funzione $f$ è continua in $B$ e quindi per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti. Sia $g(x)=4+x^2-1=3+x^2$; $g:[-4,4]\to\mathbb{R}$. La funzione $g$ ha un minimo assoluto in $x=0$ e due massimi assoluti per $x=\pm4$. Allora la funzione $f$ ammetterà minimo assoluto in $(0,\pm4)$ e massimo assoluto in $(\pm4,0)$.
Metodo alternativo: $f,g\in C^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$ , $B$ è un compatto di $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, dunque per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti. Determiniamo i candidati con il metodo dello Jacobiano:

$$\begin{cases} x^2+y^2=16\\ \begin{vmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+2x & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ 2x & 2y\end{vmatrix}=0\end{cases}\iff\begin{cases}x^2+y^2=16\\ 4xy=0\end{cases}\iff(\pm4,0),\ (0,\pm4)$$

che sono esattamente i candidati individuati con il primo metodo.
Se vogliamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange osserviamo che $f,g\in C^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$, $\quad Z_g\cap(\nabla g=(0,0))=\emptyset$. Posto $F(x,y,a)=\sqrt{x^2+y^2}+x^2-1+a(x^2+y^2-16)$ risulta $\nabla F=(0,0,0)$ se e solo se

$$\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+2x+2ax=0\\ y\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+2a\Big)=0\\ x^2+y^2=16\end{cases}\implies\begin{cases}y=0\\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+2x+2ax=0\\ x^2+y^2=16\end{cases}\cup$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+2a=0\\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+2x+2ax=0\\ x^2+y^2=16\end{cases}$$

Dal primo sistema si ottiene $(\pm4,0)$ dal secondo $(0,\pm4)$.

D

**Esonero 26 Marzo 2024** Civile ☐ Meccanica ☐ BES/DSA ☐

---

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

**1)** Determinare massimi e minimi relativi della funzione $f(x,y,z) = x^2(x-3) + (y-1)^2 - \cos z$. **[punti 12]**

**2)** Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da: $F(x,y) = \dfrac{x^4 y}{x^6 + y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $F(0,0) = 0$.
Siano $x(t) = t$, $y(t) = t^3$. Quali delle seguente affermazioni sono corrette:

- $\alpha$) $F$ è continua in $(0,0)$ V F
- $\beta$) $F$ ammette gradiente nell'origine V F
- $\gamma$) $\nabla F(0,0) = (0,1)$ V F
- $\delta$) $G(t) := F(x(t), y(t))$ è derivabile nell'origine e $G'(0) = \nabla F(0,0) \cdot (x'(0), y'(0))$ V F
- $\varepsilon$) $F$ è differenziabile in $(0,0)$ V F

(Selezionare le risposte esatte e motivarle **[12 punti]**)

**3)** Sia $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + 2x^2 + 1$. Determinare i punti di massimo e di minimo assoluti di $f$ nell'insieme $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 4\}$. **[punti 6]**

---

## Svolgimento

**1)** Risulta $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ quindi i punti di massimo o di minimo relativo devono annullare il gradiente di $f$.

$$\begin{cases} 3x(x-2) = 0 \\ 2(y-1) = 0 \\ \sin z = 0 \end{cases} \iff (x,y,z) = (0,1,k\pi);\ (x,y,z) = (2,1,k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Calcoliamo ora le derivate seconde

$$f''_{xx}(x,y,z) = 6(x-1), \quad f''_{xy}(x,y,z) = 0 = f''_{yx}(x,y,z), \quad f''_{xz}(x,y,z) = 0 = f''_{zx}(x,y,z)$$
$$f''_{yy}(x,y,z) = 2, \quad f''_{yz}(x,y,z) = 0 = f''_{zy}(x,y,z), \quad f''_{zz}(x,y,z) = \cos z.$$

$$H(x,y,z)-\lambda\mathbb{I}=\begin{pmatrix}6(x-1)-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & \cos z-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\det\Big(H(0,1,k\pi)-\lambda\mathbb{I}\Big)=\begin{vmatrix}-6-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & (-1)^k-\lambda\end{vmatrix}=(-6-\lambda)(2-\lambda)((-1)^k-\lambda)=0$$

$\lambda_1=-6,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=(-1)^k\quad (0,1,k\pi)$ punti sella per ogni $k\in\mathbb{Z}$

$$\det\Big(H(2,1,k\pi)-\lambda\mathbb{I}\Big)=\begin{vmatrix}6-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & (-1)^k-\lambda\end{vmatrix}=(6-\lambda)(2-\lambda)((-1)^k-\lambda)=0$$

$\lambda_1=6,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=(-1)^k$

$k=2n\quad (2,1,2n\pi)$ punti di minimo relativo per ogni $n\in\mathbb{Z}$

$k=2n+1\quad (2,1,(2n+1)\pi)$ punti sella per ogni $n\in\mathbb{Z}$

**2)** Vedi esercizio 2 Compito B.

**3)** L'insieme $B$ è un compatto (è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2). La funzione $f$ è continua in $B$ e quindi per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti. Sia $g(x)=2+2x^2+1=3+2x^2$; $g:[-2,2]\to\mathbb{R}$. La funzione $g$ ha un minimo assoluto in $x=0$ e due massimi assoluti per $x=\pm 2$. Allora la funzione $f$ ammetterà minimo assoluto in $(0,\pm 2)$ e massimo assoluto in $(\pm 2,0)$.

Metodo alternativo: $f,g\in C^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$ , $B$ è un compatto di $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, dunque per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti. Determiniamo i candidati con il metodo dello Jacobiano:

$$\begin{cases} x^2+y^2=4\\ \begin{vmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+4x & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ 2x & 2y\end{vmatrix}=0\end{cases}\iff\begin{cases}x^2+y^2=4\\ 8xy=0\end{cases}\iff (0,\pm 2),\ (\pm 2,0)$$

che sono esattamente i candidati individuati con il primo metodo.

Se vogliamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange osserviamo che $f,g\in C^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$, $Z_g\cap(\nabla g=(0,0))=\emptyset$. Posto $F(x,y,a)=\sqrt{x^2+y^2}+2x^2+1+a(x^2+y^2-4)$ risulta $\nabla F=(0,0,0)$ se e solo se

$$\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+4x+2ax=0\\ y\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+2a\Big)=0\\ x^2+y^2=4\end{cases}\implies\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+4x+2ax=0\\ y=0\\ x^2+y^2=4\end{cases}\cup\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+4x+2ax=0\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+2a=0\\ x^2+y^2=4\end{cases}$$

Dal primo sistema si ottiene $(\pm 2,0)$ dal secondo $(0,\pm 2)$.