Analisi Matem. II (Civ.) - mod. Analisi di Matem. 2 (Mecc.)
13 Giugno 2022

---

1) Sia $D := \{(x,y) \in (\mathbb{R})^2 : x, y \geq \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1, 1 \leq x+y \leq 5\}$. Disegnare l'insieme e parametrizzare la sua frontiera in modo che il verso di percorrenza risulti positivo. Facendo uso delle formule di Green, calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{+Fr(D)} \left[(\frac{1}{x}\log(1+xy) + x + 3y)dx + (\frac{1}{y}\log(1+xy) + x + 3y)dy \right]$$

Esprimere infine il risultato dell'integrale in termini fisici. **(8 punti)**

2) Assegnata la funzione f definita da $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}\arctan\sqrt{|x-1|}$ Studiarne la continuità e derivabilità parziale nei punti del dominio. Determinare, se esistono, i massimi ed i minimi relativi nel suo dominio ed il massimo ed il minimo assoluti nell'insieme $T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$. **(12 punti)**

---

cenni di svolgimento

1) L'insieme D è un dominio regolare (trapezio). La sua frontiera è individuata da:

$$\begin{aligned} +Fr(D) \quad := \quad & \{(t,\varepsilon),\ 1-\varepsilon \leq t \leq 5-\varepsilon\} \cup \{(t, 5-t),\ 5-\varepsilon \geq t \geq \varepsilon\} \\ & \cup \{(\varepsilon, t),\ 5-\varepsilon \leq t \leq 1-\varepsilon\} \cup \{(t, 1-t),\ \varepsilon \leq t \leq 1-\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Le funzioni $X = (\frac{1}{x}\log(1+xy)+x+3y)$, $Y = (\frac{1}{y}\log(1+xy)+x+3y)$ sono sicuramente di classe C^1 in D in quanto $1+xy > 0$ in D e quindi in D il logaritmo è continuo e derivabile con derivate parziali continue e le funzioni $\dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{x}$ sono ben definite continue derivabili sempre in D. Per le formule di Green risulta:

$$\begin{aligned} &\int_{+Fr(D)} \left[(\frac{1}{x}\log(1+xy) + x + 3y)dx + (\frac{1}{y}\log(1+xy) + x + 3y)dy \right] = \\ &\iint_D \left[-\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{x}\log(1+xy) + x + 3y) + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{y}\log(1+xy) + x + 3y) \right] dxdy = \\ &\iint_D \left[-(\frac{1}{1+xy} + 3) + (\frac{1}{1+xy} + 1) \right] dxdy = -2\iint_D dxdy = -2(6\sqrt{2} - 4\varepsilon)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

L'integrale curvilineo di seconda specie rappresenta il flusso del campo $\vec{F} = (Y, -X)$ uscente della frontiera di D. Siamo in presenza di un pozzo, visto che il flusso, calcolato attraverso il teorema della divergenza, è negativo.

2) $f : E := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,-x), x \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$. È sicuramente continua in E perché prodotto e composizione di funzioni continue. Per quanto riguarda la derivabilità risulta:

$$f'_y(x,y) = -\frac{\arctan(\sqrt{|x-1|}))}{(x+y)^2}.$$

Mentre per la derivata parziale rispetto ad x osserviamo che

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+y} \arctan\sqrt{x-1} & x \geq 1, (x,y) \in E \\ \dfrac{1}{x+y} \arctan\sqrt{1-x} & x < 1, , (x,y) \in E. \end{cases}$$

Pertanto

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{\arctan(\sqrt{x-1})}{(x+y)^2} + \dfrac{1}{2x(x+y)\sqrt{x-1}} & x > 1 \\ \\ -\dfrac{\arctan(\sqrt{1-x})}{(x+y)^2} - \dfrac{1}{2(2-x)(x+y)\sqrt{1-x}} & x < 1. \end{cases}$$

Se $(1,y) \in E$, $(y \neq -1)$ visto che c'è il cambio di legge, bisogna fare il limite del rapporto incrementale.

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(1+h,y)-f(1,y)}{h} &= \lim_{h\to 0^\pm} \frac{1}{1+h+y} \frac{\arctan\sqrt{|h|}}{h} = \\ &= \frac{1}{1+y} \lim_{h\to 0^\pm} \frac{\arctan\sqrt{|h|}}{h} = \frac{1}{1+y} \lim_{h\to 0^\pm} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = \\ &= \begin{cases} +\infty \cdot \text{segno}(1+y) & h \to 0^+ \\ -\infty \cdot \text{segno}(1+y) & h \to 0^- \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi $\nabla f : E \setminus \{(1,y), y \neq -1\} \to \mathbb{R}^2$.

Studiamo il segno della funzione:

$$f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y \neq 0 \\ \arctan\sqrt{|x-1|} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \neq -x \\ x = 1 \end{cases}$$

$$f(x,y) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y > -x \\ x \neq 1 \end{cases} \qquad f(x,y) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y < -x \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Segue allora che i punti della retta $x = 1$ (che sono punti angolosi) sono di minimo relativo per f se $y > -1$, mentre sono di massimo relativo per f se $y < -1$.

Vediamo se ci sono altri punti interni e di derivabilità di massimo o minimo relativo. Osserviamo che

$$f'_y(x,y) = -\frac{1}{(x+y)^2} \text{ arctg } \sqrt{|x-1|} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (già esaminati)}$$

quindi $\nabla f \neq (0,0) \in E \setminus \{(1,y), y \neq -1\}$ non ci sono altri punti da studiare.

Dallo studio precedente, possiamo dedurre che su T la f ammette minimo assoluto uguale a 0 nel punti $(1,t) : 0 \leq t \leq 1$.

Per quanto riguarda il massimo assoluto, osserviamo che l'insieme T non è compatto e quindi non possiamo applicare il teorema di Weierstrass. Inoltre

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2x} \operatorname{arctg} \sqrt{|x-1|} = +\infty.$$

Quindi f non è limitata superiormente. Segue che non esiste massimo assoluto su T.

Analisi Matem. II (Civ.) - mod. Analisi di Matem. 2 (Mecc.)

27 Giugno 2022

---

1) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} = (x^2, xy, xz)$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_0^+)^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ z = x^2 + y^2\},$$

quando la normale è orientata verso il basso.

2) Determinare massimi e minimi vincolati, se esistono, della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ soggetta al vincolo

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 20 = 0\}.$$

Svolgimento

1) La superficie Σ è la porzione di paraboloide $z = x^2 + y^2$ definita in $D = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_0^+)^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Essa è regolare e il flusso del campo vettoriale $\vec{F}$ si calcola attraverso l'integrale superficiale $\int_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{n} dS$. Siccome la normale è orientata verso il basso risulta $\vec{n} = (2x, 2y, -1)$. Pertanto, passando a coordinate polari,

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iint_D (x^2, xy, xz) \cdot (2x, 2y, -1) dxdy = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^1 (r^2 \cos^2 t, r^2 \sin t \cos t, r^3 \cos t) \cdot (2r \cos t, 2r \sin t, -1) r dr = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^1 (2r^4 \cos^3 t + 2r^4 \sin^2 t \cos t - r^4 \cos t) dr = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \int_0^1 r^4 dt = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

2) La funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ poiché è un polinomio. Il vincolo $g(x, y) = 0$ è la circonferenza di centro $(1, 2)$ e raggio $r = \sqrt{20}$, dunque è un compatto. Il teorema di Weierstrass ci dice allora che esistono massimi e minimi assoluti. Per determinarli utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange poiché anche la $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Poniamo allora $F(x,y,a)=x^2+y^2+a((x-1)^2+(y-2)^2-20)$. Osserviamo innanzitutto che $\nabla g(x,y)=(2(x-1),2(y-2))\neq(0,0)$ per ogni $(x,y)\in M$ e quindi i punti di massimo e di minimo vincolato vanno cercati applicando il teorema di Fermat a F. Risulta

$$\begin{cases} F'_x=2x+2a(x-1)=0 \\ F'_y=2y+2a(y-2)=0 \\ F'_a=(x-1)^2+(y-2)^2-20=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(1+a)=a \\ y(1+a)=2a \\ (x-1)^2+(y-2)^2-20=0 \end{cases}$$

Non può risultare $a=-1$, altrimenti le prime due equazioni sarebbero false. Per cui

$$\begin{cases} x=\frac{a}{1+a} \\ y=\frac{2a}{1+a} \\ (x-1)^2+(y-2)^2-20=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{a}{1+a} \\ y=\frac{2a}{1+a} \\ (\frac{a}{1+a}-1)^2+(\frac{2a}{1+a}-2)^2-20=0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x=\frac{a}{1+a} \\ y=\frac{2a}{1+a} \\ \frac{5}{(1+a)^2}=20 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{a}{1+a} \\ y=\frac{2a}{1+a} \\ 1+a=\pm\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-\frac{3}{2} \\ x=3 \\ y=6. \end{cases}$$

Risulta $f(-1,-2)=5<f(3,6)=45$ pertanto $(-1,-2)$ è il punto di minimo vincolato e $(3,6)$ quello di massimo vincolato.

Analisi Matem. II (Civ.) - mod. Analisi di Matem. 2 (Mecc.)
11 Luglio 2022

---

1) Sia dato il campo vettoriale $\vec{F}$ definito da

$$\vec{F} = \left(\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{1}{z^{3/4}} + \sqrt{x^2+y^2} \right).$$

Determinare la regione Ω per la quale $\vec{F} \in C^1(\Omega)$. Verificare che $\vec{F}$ è irrotazionale. Dire se $\vec{F}$ è conservativo in Ω. Se si, calcolarne la classe delle primitive.

2) Calcolare il volume della regione di spazio compresa tra le superfici di equazioni

$$z = 3 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 2z + 2 = 0\ .$$

Svolgimento

1) Risulta $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \neq (0,0),\ z > 0\}$. L'insieme è aperto e connesso, dunque è una regione di $\mathbb{R}^3$; tuttavia non è un semplicemente connesso perché ad Ω manca la semiretta $\{(0,0,z), z > 0\}$. Per provare che $\vec{F}$ è conservativo, avendo già osservato che esso è di classe C^1 in Ω, basta calcolarne il rotore

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{1}{z^{3/4}} + \sqrt{x^2+y^2} \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

in quanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} &= -\frac{xyz}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial z} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial Y}{\partial z} &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial Z}{\partial y}. \end{aligned}$$

Siccome $\vec{F}$ non è positivamente omogeneo di grado $\alpha \neq -1$ e la regione non è semplicemente connessa, non possiamo applicare le condizioni sufficienti studiate. Applichiamo direttamente la definizione. Se esiste $U \in C^2(\Omega)$ tale che $\nabla U = \vec{F}$, allora deve risultare

$$\begin{aligned}
&U(x,y,z) = \int \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}dx = z\sqrt{x^2+y^2} + f(y,z),\ f \in C^1(\{(y,z) : y \neq 0,\ z > 0\}) \\
&\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} \Longleftrightarrow f(y,z) = g(z), g \in C^1(\mathbb{R}^+) \\
&\frac{\partial U}{\partial z} = \sqrt{x^2+y^2} + g'(z) = \frac{1}{z^{3/4}} + \sqrt{x^2+y^2} \Longleftrightarrow g'(z) = \frac{1}{z^{3/4}}, g(z) = 4z^{1/4} \\
&U(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2} + 4z^{1/4} + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Dunque $\vec{F}$ è conservativo.

2) Le superfici $z = 3$ e $x^2 + y^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = 1 + \dfrac{x^2+y^2}{2}$ sono rispettivamente un piano ed un paraboloide. I punti del piano xy corrispondenti all'intersezione delle due superfici sono dati da

$$\begin{cases} z = 3 \\ z = 1 + \dfrac{x^2+y^2}{2} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4\ .$$

Possiamo quindi calcolare il volume come l'integrale doppio

$$V = \iint_D \left[3 - \left(1 + \frac{x^2+y^2}{2}\right)\right] dxdy\ = \iint_D \left(2 - \frac{x^2+y^2}{2}\right) dxdy$$

essendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Consideriamo le coordinate polari con polo nell'origine

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

il cui jacobiano è $j = \rho$, cosicché l'insieme D viene trasformato in

$$T = \{(\theta,\rho) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\ ,\ 0 \leq \rho \leq 2\}\ .$$

Dalla formula del cambiamento di variabili per gli integrali doppi e dalle formule di riduzione otteniamo

$$V\ = \iint_T \left(2 - \frac{\rho^2}{2}\right)\rho\, d\rho d\theta\ = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left(2\rho - \frac{\rho^3}{2}\right) d\rho\ = 2\pi\left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{8}\right]_0^2 = 4\pi\ .$$

Analisi Matem. II (Civ.) - mod. Analisi di Matem. 2 (Mecc.)
1 Settembre 2022

---

1) Sia $\mathcal{C}$ una corda parametrizzata da $x(t) = t\cos(2t), y(t) = -t\sin(2t)$ con $-1 \le t \le 1$. Calcolare la massa della corda sapendo che la sua densità $d(x,y)$ è $d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
(punti 12)

2) Determinare massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x,y) = x^2\log(1+y) + x^2y^2. \qquad \text{(punti 18)}$$

Svolgimento

1) Sia $\gamma(t) = (t\cos 2t, -t\sin 2t)$, con $-1 \le t \le 1$. Risulta $\gamma \in C^1([-1,1])$ e

$$\begin{aligned} x'(t) &= \cos 2t - 2t\sin 2t \qquad y'(t) = -\sin 2t - 2t\cos 2t \\ s'(t) &= \sqrt{\cos^2 2t + 4t^2\sin^2 2t - 4t\sin 2t\cos 2t + \sin^2 2t + 4t^2\cos^2 2t + 4t\sin 2t\cos 2t} = \\ &= \sqrt{1+4t^2} > 0, \text{ per ogni } t \in [-1,1]. \end{aligned}$$

La sua massa pertanto sarà data da

$$\begin{aligned} m &= \int_{-1}^{1} \sqrt{t^2\cos^2 2t + t^2\sin^2 2t}\cdot\sqrt{1+4t^2}dt = \int_{-1}^{1}|t|\sqrt{1+4t^2}\,dt = \\ &= 2\int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\,dt \qquad 1+4t^2 = w,\ 8tdt = dw,\ 1 \le w \le 5 \\ m &= \frac{1}{4}\int_1^5 \sqrt{w}\,dw = \frac{1}{6}[w^{3/2}]_1^5 = \frac{1}{6}[5\sqrt{5}-1]. \end{aligned}$$

2) Il dominio della funzione f è l'insieme $D := \{(x,y) : y > -1\}$. Risula $f \in C^2(D)$ e pertanto i punti di massimo e di minimo relativo devono soddisfare il teorema di Fermat.

$$\begin{cases} 2x[\log(1+y)+y^2] = 0 \\ x^2\left(\dfrac{1}{1+y}+2y\right) = 0 \end{cases} \iff x = 0 \vee \begin{cases} \log(1+y)+y^2 = 0 \\ \dfrac{1}{1+y}+2y = 0 \end{cases}$$

Poiché $\dfrac{1}{1+y}+2y=0$ se e solo se $2y^2+2y+1=0$ (che non ammette soluzioni), i punti critici sono $(0,y), y>-1$. Scriviamo la matrice Hessiana

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} 2[\log(1+y)+y^2] & 2x\big(\dfrac{1}{1+y}+2y\big) \\ 2x\big(\dfrac{1}{1+y}+2y\big) & x^2\big(-\dfrac{1}{(1+y)^2}+2\big). \end{pmatrix}$$

Purtroppo risulta $detH(0,y)=0$ per ogni $y>-1$. Procediamo allora direttamente a studiare la natura di questi punti. Innanzitutto $f(0,y)=0$ per ogni $y>-1$. Risulta

$$f(x,y)-f(0,y) \quad = \quad x^2[\log(1+y)+y^2]\geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \log(1+y)+y^2\geq 0.$$

Sia $g:]-1,\infty[\to\mathbb{R}$ definita da $g(y)=\log(1+y)+y^2$. Vale ovviamente $g(0)=0, g(y)>0$ se $y>0$. Se invece $-1<y<0$ allora la sua derivata prima $\dfrac{2y^2+2y+1}{1+y}$ è positiva e quindi g in tale intervallo è crescente e pertanto $g(y)<0$. Pertanto

- $(0,y)$ con $y>0$ sono di minimo locale;
- $(0,0)$ è un punto sella;
- $(0,y)$ con $-1<y<0$ sono di massimo locale.

Analisi Matem. II (Civ.) - mod. Analisi di Matem. 2 (Mecc.)

15 Settembre 2022

---

1) Sia $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x^2+y^2 \geq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - \frac{x^2}{4}\}$. Calcolare

$$\int_{Fr(E)} \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}} ds.$$

2) Verificare il teorem di Stokes per il campo vettoriale $\vec{F} = (x^3, y^3, 1)$ e la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1, |z| \leq 1\}$.

Svolgimento

1) L'insieme E si trova nel primo quadrante, è esterno alla circonferenza $x^2+y^2=1$ e al di sotto della parabola $y = 1 - \frac{x^2}{4}$. Pertanto la sua frontiera (percorsa in verso orario) è data da $Fr(E) = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_2$ dove

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (t, 1-\frac{t^2}{4}), \qquad 0 \leq t \leq 2;\\
\gamma_2(t) &= (t, 0), \qquad 2 \geq t \geq 1;\\
\gamma_3(t) &= (\cos t, \sin t), \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Osserviamo che $Fr(E)$ è una curva generalmente regolare e che l'integrale curvilineo di prima specie non dipende dal verso di percorrenza. Risulta pertanto

$$\begin{aligned}
\gamma_1'(t) &= (1, -\frac{t}{2}), \qquad 0 \leq t \leq 2; \qquad ds = \frac{4+t^2}{2} dt;\\
\gamma_2'(t) &= (1, 0), \qquad 2 \geq t \geq 1; \qquad ds = dt\\
\gamma_3'(t) &= (-\sin t, \cos t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \qquad ds = dt.
\end{aligned}$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
I &:= \int_{Fr(E)} \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}} ds = \sum_{i=1}^{3} \int_{\gamma_i} \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}} ds \\
& \int_{\gamma_1} \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}} ds = \int_0^2 \frac{t(1-t^2/4)}{\sqrt{4+t^2}} \cdot \frac{4+t^2}{2} dt = \frac{1}{2}\int_0^2 (t - \frac{t^3}{4}) dt = \frac{1}{2}; \\
& \int_{\gamma_2} \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}} ds = 0; \\
& \int_{\gamma_2} \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \cos t}{\sqrt{4+\cos^2 t}} dt = [-\sqrt{4+\cos^2 t}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{5} - 2; \\
I &= \sqrt{5} - \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

2) La superficie Σ è la porzione della superficie laterale del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, quando $|z| \leq 1$. Essa è sicuramente regolare, di classe C^2, orientabile e con bordo. Una rappresentazione parametrica della superficie è

$$r : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}^3 : x = \cos t, y = \sin t, z = z.$$

Se andiamo a considerate la frontiera di $[0, 2\pi] \times [-1, 1]$ con il suo verso positivo di percorrenza assegnato, otteniamo le curve:

- $\gamma_1 = \{(\cos t, \sin t, -1), 0 \leq t \leq 2\pi\}$, (verso antiorario)
- $\gamma_2 = \{(\cos t, \sin t, 1), 2\pi \geq t \geq 0\}$ (verso orario) e
- $\gamma_3 = \{(1, 0, z), |z| \leq 1\}$ (presa una volta dal basso verso l'alto e un'altra volta dall'alto verso il basso).

Calcoliamo separatamente

$$\int_{\Sigma} rot(\vec{F}) dS, \qquad \int_{+\partial\Sigma} \vec{F} \cdot dr.$$

Poiché

$$rot(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3 & y^3 & 1 \end{vmatrix} = (0, 0, 0),$$

risulta

$$\int_{\Sigma} rot(\vec{F}) dS = 0.$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{+\partial\Sigma} \vec{F} \cdot dr = \int_{+\gamma_1} \vec{F} \cdot dr - \int_{+\gamma_2} \vec{F} \cdot dr = \\
= \quad &\int_0^{2\pi} (\sin^3 t, \cos^3 t, -1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt + \\
- \quad &\int_0^{2\pi} (\sin^3 t, \cos^3 t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt = 0.
\end{aligned}
$$

Pertanto la formula di Stokes è verificata.

Analisi Matem. II (Civ.) – mod. Analisi di Matem. 2 (Mecc.)
9 Gennaio 2023

Gli Studenti di Meccanica devono risolvere gli esercizi 1,2,3. Gli Studenti di Civile devono risolvere l'esercizio 4 e altri due esercizi a scelta, tra i primi 3 esercizi.

Motivare tutte le risposte

1) Posto $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}$, utilizzando il cambiamento di variabili $(x = \rho\cos\theta,\ y = 2\rho\sin\theta)$, calcolare l'integrale

$$I = \iint_E x\left(1 - x^2 - \frac{y^2}{4}\right)\, dxdy.$$

2) Stabilire la natura dei punti critici della funzione $f(x,y) = (y-x)(x^2+y^2-1)$. Determinarne poi, nell'insieme $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x,\ x^2+y^2 \leq 1\}$, gli eventuali punti di estremo assoluto.

3) Dato il campo vettoriale $\vec{v}(x,y,z) = (ze^{xz}, 1 + z^2\cos y, xe^{xz} + 2z\sin y)$ si verifichi se ammette un potenziale e, nel caso affermativo, si determini l'espressione della classe dei potenziali.

4 - Civile) Risolvere **obbligatoriamente** il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 13y = 8\sin(3x) \\ y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Cenni di svolgimento

1) L'insieme E è la parte dell'ellisse di centro l'origine e semiassi $a = 1, b = 2$ contenuta nel semipiano delle $x \geq 0$.

Ricordando il cambiamento di variabili che utilizza le coordinate ellittiche, si ha

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = 2\rho\sin\theta \end{cases} \quad ; \quad J = 2\rho$$

e l'insieme E viene trasformato nel rettangolo

$$R = \left\{(\theta,\rho) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \rho \leq 1\right\}.$$

Usando quindi la formula del cambiamento di variabili si ottiene

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_R \rho\cos\theta\left(1-\rho^2\right)\, 2\rho d\theta d\rho = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \int_0^1 \left(\rho^2-\rho^4\right) d\rho = \\
&= 2\left[\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 = \frac{8}{15}.
\end{aligned}
$$

2) La funzione è di classe C^∞ in tutto $\mathbb{R}^2$, quindi gli eventuali punti di massimo e di minimo devono essere soluzione del sistema $\nabla f = (0,0)$. Determiniamo l'insieme dei punti critici:

$$
\begin{cases} f_x(x,y) \equiv -(x^2+y^2-1)+2x(y-x)=0 \\ f_y(x,y) \equiv x^2+y^2-1+2y(y-x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1=2x(y-x) \\ x^2+y^2-1=-2y(y-x) \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1=2x(y-x) \\ 2x(y-x)=-2y(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1=2x(y-x) \\ x(y-x)+y(y-x)=0 \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1=2x(y-x) \\ (x+y)(y-x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1=2x(y-x) \\ y=x \vee y=-x \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-1=0 \\ y=x \end{cases} \vee \begin{cases} 2x^2-1=-4x^2 \\ y=-x \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \vee (x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right).
$$

La matrice Hessiana è

$$
H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x+2y & -2y+2x \\ 2x-2y & 6y-2x \end{pmatrix},
$$

per cui:

$$\det H_f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-8 \qquad\Rightarrow\qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ è punto di sella;}$$

$$\det H_f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-8 \qquad\Rightarrow\qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ è punto di sella;}$$

$$\left.\begin{array}{l}\det H_f\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=8\\ f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=-\frac{8}{\sqrt{6}}<0\end{array}\right\} \Rightarrow\qquad \left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \text{ è punto di massimo relativo;}$$

$$\left.\begin{array}{l}\det H_f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=8\\ f_{xx}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\frac{8}{\sqrt{6}}>0\end{array}\right\} \Rightarrow\qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \text{ è punto di minimo relativo.}$$

Dalle definizioni di f e K si vede subito che la funzione si annulla sulla frontiera di K ed è positiva al suo interno, per cui tutti i punti di $Fr\,K$ sono di minimo assoluto per $f|_K$.

Essendo f continua su K compatto, per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette anche massimo assoluto su K e, per lo studio del segno, esso deve essere interno a K stesso. L'unico punto interno che soddisfa le condizioni necessarie per essere estremanti è $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, che quindi è il punto di massimo assoluto per $f|_K$.

3) Il campo vettoriale $\vec{v}\in C^1(\mathbb{R}^3)$ e quindi basta verificare che il suo rotore si annulli. Risulta infatti

$$\frac{\partial v_3}{\partial y}=2z\cos y=\frac{\partial v_2}{\partial z};\qquad \frac{\partial v_1}{\partial z}=e^{xz}(1+x)=\frac{\partial v_3}{\partial x};\qquad \frac{\partial v_2}{\partial x}=0=\frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

Per determinare la classe dei potenziali $U(x,y,z)$ deve risultare

$$\begin{aligned}
U(x,y,z) &= \int z e^{xz} dx = e^{xz} + f(y,z) \quad f \in C^1(\mathbb{R}^2) \\
\frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z) &= x e^{xz} + \frac{\partial f}{\partial z}(y,z) = x e^{xz} + 2z \sin y \\
& \Rightarrow f(y,z) = z^2 \sin y + g(y), \quad g \in C^1(\mathbb{R}) \\
U(x,y,z) &= e^{xz} + z^2 \sin y + g(y) \\
\frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z) &= z^2 \cos y + g'(y) = z^2 \cos y + 1 \\
& \Rightarrow g(y) = y + k, \quad k \in \mathbb{R} \\
U(x,y,z) &= e^{xz} + z^2 \sin y + y + k.
\end{aligned}$$

4-Civile) L'integrale generale della equazione differenziale (del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti, completa) è

$$y(x) = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + \frac{3}{5} \cos 3x + \frac{1}{5} \sin 3x.$$

La soluzione particolare del problema di Cauchy è

$$y^*(x) = e^{2x}(-\frac{3}{5} \cos 3x + \frac{1}{5} \sin 3x) + \frac{3}{5} \cos 3x + \frac{1}{5} \sin 3x.$$

Analisi Matem. II (Civ.) – mod. Analisi di Matem. 2 (Mecc.)
23 Gennaio 2023

Gli Studenti di Meccanica devono risolvere gli esercizi 1,2,3. Gli Studenti di Civile devono risolvere l'esercizio 4 e altri due esercizi a scelta, tra i primi 3 esercizi.
Motivare tutte le risposte

1) Calcolare le derivate seconde miste in $(0,0)$ della funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}ds$ quando la curva γ è parametrizzata da:
$[x(t), y(t)] = [2(\cos t + t\sin t),\ 2(\sin t - t\cos t)], \quad 0 \le t \le 2\pi.$

3) E' conservativo il campo vettoriale H di componenti $H(x,y,z) = (z-y, y-z, (z-y)^2)$?

4 - Civile) Risolvere **obbligatoriamente** il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 3x + 2 \\ y(0) = -1, \qquad y'(0) = 2. \end{cases}$$

Cenni di svolgimento

1) Calcoliamo innanzitutto il gradiente di f. Se $(x,y) \neq (0,0)$ risulta

$$f'_x(x,y) = -\frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$f'_y(x,y) = -\frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

mentre in $(0,0)$ risulta

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$
$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0.$$

Per calcolare le derivate seconde miste nell'origine calcoliamo i limiti dei rapporti incrementali delle derivate parziali prime:

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = 1,$$
$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x} = -1.$$

2) La curva γ è una curva di classe $C^1([0,2\pi])$ e

$$y'(t) = (2t\cos t, 2t\sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Risulta $ds = 2tdt$ e pertanto

$$\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}ds = 2\int_0^{2\pi} 2t\sqrt{1+t^2}dt = \frac{4}{3}\left[(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\left[(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

3) Sia H il campo vettoriale di componenti $H(x,y,z) = (z-y, y-z, (z-y)^2)$, $H \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Poiché il campo vettoriale è di classe C^1 in un semplicemente connesso, il campo è conservativo se e solo se è irrotazionale. Calcoliamo allora il rotore di H.

$$\nabla H = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z-y & y-z & (z-y)^2 \end{pmatrix} = (1-2z+2y, 1, 1).$$

Dunque H non è conservativo.

4) L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea è $\alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0$ che ha come soluzioni $\alpha = 3$ con molteplicità 2. L'integrale generale della equazione omogenea è $y(x) = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$. Una soluzione della equazione completa avrà la forma $y(x) = ax + b$. L'integrale generale della equazione completa è

$$y(x) = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}.$$

La soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -\frac{13}{9}e^{3x} + 6xe^{3x} + \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}.$$

Analisi Matem. II (Civ.) – mod. Analisi di Matem. 2 (Mecc.)
6 Febbraio 2023

Gli Studenti di Meccanica devono risolvere gli esercizi 1,2,3. Gli Studenti di Civile devono risolvere l'esercizio 4 e altri due esercizi a scelta, tra i primi 3 esercizi.
Motivare tutte le risposte

1) Esplicitare, se possibile, in un intorno del punto $(1,1)$ l'equazione

$$(x-1)\log(\sin y)+(y-1)\tan(x^2)=0,$$

nella forma $y=y(x)$ e calcolare $y'(1)$.

2) Determinare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y,z)=\arctan(y\sqrt[3]{xz})$ sulla curva γ determinata dalla intersezione delle superfici di equazione $x^2+y^2=1$ e $z=x^2$.

3) Provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}, \qquad x\in\mathbb{R}$$

converge uniformemente ma non totalmente.

4 - Civile) Risolvere **obbligatoriamente** il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''-4y'+4y=e^{2x} \\ y(0)=1, \qquad y'(0)=2. \end{cases}$$

Cenni di svolgimento

1) Verifichiamo di poter applicare il teorema di Dini. Sia U in intorno di $(1,1)$ di raggio minore di $1/2$ (in tal modo $(0,0)\notin\overline{U}$ e $x^2\neq\frac{\pi}{2}$).
Allora, posto $f(x,y)=(x-1)\log(\sin y)+(y-1)\tan(x^2)$, risulta $f\in C^1(U)$ e $f(1,1)=0$. Inoltre $f'_y(x,y)=(x-1)\dfrac{\cos y}{\sin y}+\tan(x^2)$ e $f'_y(1,1)=\tan(1)\neq 0$. Allora il teorema di Dini assicura l'esistenza di un intorno I di $x=1$, J di $y=1$, $(I\times J\subset U)$ e di una funzione $y:I\to J$ tale che $f(x,y(x))=0$ per ogni $x\in I$. Inoltre

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\frac{f'_x(x,y(x))}{f'_y(x,y(x))}=-\frac{\log(\sin y)+(y-1)2x(1+\tan^2(x^2)}{(x-1)\frac{\cos y}{\sin y}+\tan(x^2)} \\ y'(1) &= -\frac{\log(\sin(1))}{\tan(1)}. \end{aligned}$$

2) La curva γ può essere parametrizzata nel seguente modo

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \qquad 0 \le t \le 2\pi. \\ z(t) = \cos^2 t \end{cases}$$

Sia $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$g(t) = f(\cos t, \sin t, \cos^2 t) = \arctan(\cos t \sin t).$$

La funzione $g \in C^1([0, 2\pi])$ è definita in un compatto e per il teorema di Weierstrass ammette massimi e minimi assoluti. Risulta

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\sin^2 t \cos^2 t + 1} \ge 0 \quad \Longleftrightarrow \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t \ge 0 \\ &\Longleftrightarrow 0 < t < \frac{\pi}{4} \vee \frac{3}{4}\pi < t < \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_t g(t) &= g(\frac{1}{4}\pi) = \arctan(\frac{1}{2}) \\ \min_t g(t) &= g(\frac{3}{4}\pi) = -\arctan(\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

3) Sia $x = \sqrt{n}$. Risulta allora

$$\sup_x \frac{1}{n + x^2} \ge \frac{1}{2n}$$

e dunque la serie data non converge totalmente. Per provarne la convergenza uniforme si usa il criterio di Leibnitz, visto che la serie è a segni alterni. In particolare

$$\sup_x |R_n(x)| \le \sup_x \frac{1}{n + 1 + x^2} \le \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \text{uniformemente.}$$

4) L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea è $\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$ che ha come soluzioni $\alpha = 2$ con molteplicità 2. L'integrale generale della equazione omogenea è $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$. Una soluzione della equazione completa avrà la forma $y(x) = ax^2 e^{2x}$. L'integrale generale della equazione completa è

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x}.$$

La soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x}.$$

Analisi Matematica II (Civile)
30 Maggio 2023 - fuori corso e laureandi

Motivare tutte le risposte

1) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = e^x + 11e^{2x} \\ y(0) = \dfrac{3}{2}; \quad y'(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

2) Calcolare il volume del solido

$$E := \{(x, y, z) : \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 2 + x^2 + y^2\}.$$

3) Dato il campo vettoriale $\vec{F}(x, y) = (2x \log y, \dfrac{x^2}{y} + 2y \log y)$, stabilire se è conservativo nel suo dominio e determinarne un potenziale, se esiste. Cacolare il lavoro svolto dal campo $\vec{F}$ lungo la curva parametrizzata da $x(t) = e^t$, $y(t) = e^{2t}$, $0 \leq t \leq 1$.

Cenni di svolgimento

1)

$y'' - 5y' + 6y = e^x + 11e^{2x}$ è una equazione differenziale lineare del secondo ordine completa. L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è $\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$ che ammette come soluzioni $\alpha = 2$ e $\alpha = 3$. L'integrale generale della equazione omogenea associata è $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$.

Cerchiamo ora una soluzione particolare di $y'' - 5y' + 6y = e^x$ della forma $y(x) = ae^x = y'(x) = y''(x)$. Sostituendo nella equazione differenziale otteniamo $a = \dfrac{1}{2}$.

Cerchiamo ora una soluzione particolare di $y'' - 5y' + 6y = +11e^{2x}$. Siccome $\alpha = 2$ è soluzione della equazione caratteristica la soluzione cercata sarà della forma $y(x) = bxe^{2x}$. Derivandola due volte e sostituendola nella equazione differenziale si ottiene $b = -11$.

L'integrale generale della equazione completa è

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \frac{1}{2}e^x - 11xe^{2x}.$$

Imponendo i dati iniziali si ottiene

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \dfrac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ 2c_1 + 3c_2 + \dfrac{1}{2} - 11 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = -8 \\ c_2 = 9 \end{cases}$$

2) Risulta

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(E) &= \iint (2 + x^2 + y^2) dxdy = \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 r(2 + r^2) dr = \\ &= 2\pi \left[r^2 + \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{5}{2}\pi. \end{aligned}$$

3) Siano $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $F_1 = 2x \log y, F_2 = \dfrac{x^2}{y} + 2y \log y$. Risulta $\vec{F} \in C^1(\Omega)$. Inoltre $\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \dfrac{2x}{y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$, per ogni $(x, y) \in \Omega$. Pertanto $\vec{F}$ è irrotazionale e, siccome Ω è semplicemente connesso, $\vec{F}$ è conservativo. Per determinarne un potenziale osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) &= 2x \log y \\ U(x, y) &= \int 2x \log y dx = x^2 \log y + f(y), \quad f \in C^1(\mathbb{R}^+) \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{x^2}{y} + f'(y) = \frac{x^2}{y} + 2y \log y \iff \\ & \qquad f(y) = \int 2y \log y dy = y^2 \log y - \frac{y^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$U(x, y) = x^2 \log y + y^2 \log y - \frac{y^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

La curva $\mathcal{C}$ congiunge i punti $(1, 1)$ e (e, e^2) pertanto il lavoro compiuto dal campo $\vec{F}$ lungo la curva $\mathcal{C}$ è pari a

$$L_{\mathcal{C}}(\vec{F}) = U(e, e^2) - U(1, 1) = 2e^2 + 2e^4 - \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2}.$$

Analisi Matematica II (Civile) **30 Maggio 2023**
Modulo Analisi - Matematica II (Meccanica) **preappello**

---

1) Sia S la superficie ottenuta dalla rotazione di un angolo piatto attorno all'asse z della curva $z = 2 - x,\ x \in [2, 4]$ e orientata in modo che la normale abbia terza componente positiva. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$F(x, y, z) = \Big(x^2 y\,,\ xy^2,\ z\Big).$$

Il flusso di F attraverso S è pari a

- □ 0 □ $-\dfrac{20}{3}\pi$ □ $\dfrac{\pi}{3}$ □ $\dfrac{\pi}{6}$ □ $\dfrac{\pi^2}{12}$

2) Data la superficie cartesiana S definita dalla funzione $f(x, y) = x^2 y - 4x - y^2$ trovare il versore ν normale ad essa nel punto $(1, 1, f(1, 1))$.

- □ $\nu = \Big(\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, 0\Big)$ □ $\nu = \Big(\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\Big)$ □ $\nu = \Big(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big)$ □ $\nu = \Big(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\Big)$

3) Data la forma differenziale

$$\omega = \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 5y^2\Big)dx + \Big(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 10xy\Big)dy.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \Big(\cos(\pi t) + t^2, 1 + t^2\Big)$$

- □ $-3 - \sqrt{2}$ □ $-3 + \sqrt{2}$ □ $-2 - \sqrt{5}$ □ $-2 + \sqrt{5}$

Svolgimento

1) Parametrizziamo la superficie S (la metà di un tronco di cono) :

$$\begin{cases} x = u\cos t \\ y = u\sin t \qquad (u, t) \in [2, 4] \times [0, \pi]. \\ z = 2 - u \end{cases}$$

Calcoliamo la sua normale

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos t & \sin t & -1 \\ -u\sin t & u\cos t & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(u\cos t) + \vec{j}(u\sin t) + \vec{k}u.$$

$$\begin{aligned}
F|_S &= (u^3\cos^2 t\sin t, u^3\cos t\sin^2 t, 2-u) \\
F|_S \bullet (L, M, N) &= (u^3\cos^2 t\sin t, u^3\cos t\sin^2 t, 2-u) \bullet (-u\cos t, u\sin t, u) = \\
&= u^4\cos t\sin t + 2u - u^2 \\
\int_S F\cdot(L, M, N)dudt &= \int_0^\pi dt\int_2^4 (u^4\cos t\sin t + 2u - u^2)du \\
&= \int_0^\pi dt\Big[\frac{u^5}{5}\sin t\cos t + u^2 - \frac{u^3}{3}\Big]_2^4 = \\
&= \Big[\frac{u^5}{5}\Big]_2^4 \cdot \int_0^\pi \sin t\cos t\,dt + \pi\cdot\Big[u^2 - \frac{u^3}{3}\Big]_2^4 = -\frac{20}{3}\pi.
\end{aligned}$$

2) Risulta

$$\begin{aligned}
n &= \Big(-f'_x, -f'_y, 1\Big) = \Big(4-2xy, 2y-x^2, 1\Big) \\
\text{se } (x,y) &= (1,1) \quad\Longrightarrow\quad n = (2,1,1), \quad \|n\| = \sqrt{6} \\
\nu &= \Big(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\Big)
\end{aligned}$$

3)

$$\omega = \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 5y^2\Big)dx + \Big(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 10xy\Big)dy.$$

Le componenti sono di classe $C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. Inoltre

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 5y^2\Big) &= -\frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot 2y + 10y \\
\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 10xy\Big) &= -\frac{y}{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot 2x + 10y
\end{aligned}$$

e dunque la ω è chiusa. Siccome non è definita in un semplicemente connesso, per provare la sua esattezza utilizziamo la CNES che utilizza le curve generalmente regolari chiuse con sostegno nel campo di esistenza. Grazie alle formule di Green e alla condizione sufficiente sulle componenti semplicemente connesse basta calcolare un integrale curvilineo su una singola curva chiusa che circonda l'origine (buco). Sia $\mathcal{C}$ definita da

$(\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \omega &= \int_0^{2\pi} \Big[\Big(\frac{\cos t}{1} + 5\sin^2 t\Big)(-\sin t) + \Big(\frac{\sin t}{1} + 10 \sin t \cos t\Big)(\cos t)\Big] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \Big[-\sin t \cos t - 5 \sin^3 t + \sin t \cos t + 10 \sin t \cos^2 t\Big] dt = 0.\end{aligned}$$

Dunque ω è esatta e una primitiva può essere determinata ad esempio a partire da $(1,0)$ nel semipiano delle x positive.

$$\begin{aligned}U(x,y) &= \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^2}} dt + \int_0^y \Big(\frac{t}{\sqrt{x^2+t^2}} + 10xt\Big) dt = \\ &= (x-1) + \sqrt{x^2+y^2} - x + 5xy^2 = \sqrt{x^2+y^2} + 5xy^2 - 1.\end{aligned}$$

Osserviamo che il gradiente di U coincide con le componenti di ω su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Siccome la curva γ congiunge i punti $(1,1)$ e $(0,2)$ allora

$$\int_\gamma \omega = U(0,2) - U(1,1) = 1 - \sqrt{2} - 4 = -3 - \sqrt{2}.$$

Analisi Matematica II (Civile) **12 Giugno 2023**

Modulo Analisi - Matematica II (Meccanica) **BES/DSA** ☐

---

1) Determinare, se esiste, il punto della curva $y = x^2 - 4x + \frac{7}{2}$ più vicino all'origine.

2) Sia $\vec{F}$ il campo di forze definito da $\vec{F}(x, y, z) = (2x^2y, zx, -x)$. Determinare il lavoro compiuto dal campo di forze per spostare un punto materiale lungo la curva $\gamma(t) = (1 + \cos t, \sin t, -2\sin^2 t), \quad 0 \le t \le 2\pi$.

3) Studiare la convergenza totale in $\mathbb{R}$ della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2nx)}{n^2 + 1}$$

e della serie delle sue derivate.

Cenni di svolgimento

1) Possiamo considerare come funzione da minimizzare la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ soggetta al vincolo $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4x + \frac{7}{2} - y := g(x, y) = 0\}$. Trasformiamo il problema della ricerca di un minimo vincolato in un problema di minimo assoluto per una funzione di una sola variabile sostituendo il vincolo nella f. Sia

$$F(x) = x^2 + \left(x^2 - 4x + \frac{7}{2}\right)^2 = 24x^2 + x^4 - 8x^3 - 28x + \frac{49}{4}.$$

Risulta $F'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 48x - 28 = (x - 1)(4x^2 - 20x + 28) \ge 0$ se e solo se $x \ge 1$. Dunque la funzione F è decrescente se $x \le 1$ e poi diventa crescente. Il punto $(x = 1, y = \frac{1}{2})$ è il minimo assoluto cercato.

Se avessimo voluto determinarlo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange avremmo osservato che entrambe le funzioni sono continue con derivate parziali continue e $\nabla g \ne (0, 0)$ poiché $\frac{\partial g}{\partial y} = -1$.

Sia

$$L(x, y, a) = x^2 + y^2 + a(x^2 - 4x + \frac{7}{2} - y).$$

Risulta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + a(2x-4) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - a = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial a} = x^2 - 4x + \dfrac{7}{2} - y = 0. \end{cases}$$

Ovviamente risulta $a \neq 0, a \neq -1$. Quindi

$$\begin{cases} x = \dfrac{2a}{a+1} \\ 2y = a \\ 2x^2 - 8x + 7 - 2y = 0 \end{cases}$$

Quindi

$$2\Big(\frac{2a}{a+1}\Big)^2 - 8 \cdot \frac{2a}{a+1} + 7 - a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -a^3 - 3a^2 - 3a + 7 = (a-1) \cdot (-a^2 - 4a - 7) = 0$$

che ammette come unica soluzione $a = 1$. Dunque si ritrova come candidato il punto $(x = 1, y = \frac{1}{2})$. Resta da provare che questo è il minimo assoluto. Per farlo si può provedere come sopra.

2) Il campo di forze è di classe $C^1(\mathbb{R}^3)$ ed è definito in tutto lo spazio (semplicemente connesso). Dunque $\vec{F}$ è conservativo se e solo se è irrotazionale. Si prova facilmente che non è irrotazionale. Calcoliamo direttamente il lavoro compiuto da $\vec{F}$. La curva γ è regolare poiché è semplice, di classe $C^1([0, 2\pi])$ e

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, -4\sin t \cos t) \neq (0,0,0) \quad \forall\, t \in [0, 2\pi].$$

Per la regola della catena (composizione di funzioni di classe C^1)si ha

$$\begin{aligned} F(\gamma(t)) \bullet \gamma(t) &= F(1+\cos t, \sin t, -2\sin^2 t) \bullet (-\sin t, \cos t, -4\sin t\cos t) = \\ &= -2\sin^2 t - 4\sin^2 t\cos^2 t - 6\sin^2 t \cos t + 4\sin t\cos^2 t + 4\sin t\cos t. \end{aligned}$$

Dunque il lavoro fatto dal campo $\vec{F}$ è pari a

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{F} \bullet dr &= \int_0^{2\pi} \Big(-2\sin^2 t - 4\sin^2 t\cos^2 t - 6\sin^2 t\cos t + 4\sin t\cos^2 t + 4\sin t\cos t\Big) dt = \\ &= \Big[(\sin t\cos t - t) - \frac{1}{4}(2t - \sin 2t \cos 2t) - 2\sin^3 t - \frac{4}{3}\cos^3 t + 2\sin^2 t\Big]_0^{2\pi} = -3\pi. \end{aligned}$$

3) Sia $f_n(x) = \dfrac{\sin(2nx)}{n^2+1}$. Risulta $f_n'(x) = \dfrac{2n}{n^2+1}\cos(2nx)$. Allora

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2nx)}{n^2+1} = \frac{1}{n^2+1}$$
$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n'(x)| = \sup_{\mathbb{R}} \frac{2n}{n^2+1}\cos(2nx) = \frac{2n}{n^2+1}.$$

Risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \infty$$

per il criterio del confronto asintotico con la serie $\dfrac{1}{n^2}$, mentre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} = \infty$$

sempre per il criterio del confronto asintotico con la serie $\dfrac{1}{n}$. Pertanto la serie di partenza converge totalmente, mentre la serie delle sue derivate no.

Analisi Matematica II (Civile) 26 Giugno 2023
Modulo Analisi - Matematica II (Meccanica)

Svolgere gli esercizi motivando tutte le risposte. Gli Studenti di Civile devono risolvere anche l'equazione differenziale.

1) Data la curva γ parametrizzata da $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, calcolare $\int_\gamma x\, ds$.

2) Data $f(x, y) = x\sqrt{1 - x^2 - 4y^2}$, $\quad (x, y) \in E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \le 1\}$, calcolarne: il gradiente (ove esista); la derivata direzionale nel punto $(1/2, 1/4)$ nella direzione individuata dal vettore $\vec{w} = (3, 4)$. Inoltre, la funzione presenta punti di massimo e di minimo assoluti in E? Perché?

3) Sia Σ la superficie di rotazione ottenuta da una rotazione completa della curva $z = 1 + 3x^2$, $1 \le x \le 3$, attorno all'asse z. Scrivere una parametrizzazione di Σ. Dopo aver verificato che $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 13)$ appartiene alla superficie, determinare il versore normale e il piano tangente a Σ in P.

civile) Determinare le soluzioni del seguente problema di Cauchy:

$$y'' - 2y' + y = e^x \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Cenni di svolgimento

1) La curva ha equazione polare $\rho(t) = e^t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, per cui

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{[\rho(t)]^2 + [\rho'(t)]^2} = \sqrt{e^{2t} + e^{2t}} = \sqrt{2}\, e^t$$

e l'integrale diventa

$$\int_\gamma x\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t \sqrt{2}\, e^t\, dt = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \cos t\, dt.$$

Ora, applicando due volte l'integrazione per parti, si ha

$$\begin{aligned}
\int e^{2t} \cos t\, dt &= e^{2t} \sin t - \int 2\, e^{2t} \sin t\, dt = \\
&= e^{2t} \sin t - 2\left[-e^{2t} \cos t + \int 2e^{2t} \cos t\, dt\right] = \\
&= e^{2t} \sin t + 2e^{2t} \cos t - 4 \int e^{2t} \cos t\, dt
\end{aligned}$$

e dunque

$$\int e^{2t}\,\cos t\,dt \;=\; \frac{(\sin t + 2\cos t)\,e^{2t}}{5} + c\;,\;\; c\in\mathbb{R}.$$

Pertanto si ha

$$\int_\gamma x\,ds \;=\; \sqrt{2}\left[\frac{(\sin t + 2\cos t)\,e^{2t}}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \;=\; \sqrt{2}\cdot\frac{e^\pi - 2}{5}\;.$$

2) Si ha

$$\nabla f(x,y) \;=\; \left(\frac{1-2x^2-4y^2}{\sqrt{1-x^2-4y^2}},\frac{-4xy}{\sqrt{1-x^2-4y^2}}\right),$$

per $(x,y)\in E^o=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad x^2+4y^2<1\}$.

Posto $\vec{v}=\dfrac{\vec{w}}{|\vec{w}|}=\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$, essendo $f\in C^1(E^o)$ possiamo applicare il teorema sulla formula del gradiente ed ottenere

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) \;=\; \nabla f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\cdot\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2},-1\right)\cdot\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Infine, la funzione è continua su E compatto, quindi per il teorema di Weierstrass ammette sia minimo che massimo assoluti.

3) La curva generatrice γ di equazione $z=1+3x^2$, $1\le x\le 3$ è regolare e si trova nel primo quadrante del piano (x,z). La superficie generata Σ ammette come parametrizzazione

$$r(t,u)=\begin{cases} x(t,u)=u\cos t\\ y(t,u)=u\sin t & \quad u\in[1,3],\quad t\in[0,2\pi].\\ z(t,u)=1+3u^2\end{cases}$$

$P=r(2,\frac{\pi}{4})$. Infatti da $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$ possiamo assumere $t=\dfrac{\pi}{4}$ e da questo $u=2$.

L'equazione cartesiana della Σ è $z=f(x,y)=1+3(x^2+y^2)$ pertanto il vettore normale n in P è $n:=(-f'_x(\sqrt{2},\sqrt{2}),-f'_y((\sqrt{2},\sqrt{2}),1)=(-6\sqrt{2},-6\sqrt{2},1)$. la norma di tale vettore è $\sqrt{145}$ quindi il versore normale nel punto P alla Σ è $\dfrac{1}{\sqrt{145}}(-6\sqrt{2},-6\sqrt{2},1)$.

L'equazione del piano tangente alla Σ in P è

$$z=f(\sqrt{2},\sqrt{2})+f'_x(\sqrt{2},\sqrt{2})(x-\sqrt{2})+f'_y(\sqrt{2},\sqrt{2})(y-\sqrt{2})$$
$$z=13+6\sqrt{2}(x-\sqrt{2}+y-\sqrt{2})=6\sqrt{2}(x+y)-11.$$

civile) L'integrale generale della equazione differenziale è

$$y(x)=c_1e^x+c_2xe^x+\frac{1}{2}x^2e^x$$

La soluzione cercata si ottiene per $(c_1,c_2)=(0,1)$.

Analisi Matematica II (Civile) 10 Luglio 2023
Modulo Analisi - Matematica II (Meccanica)

L'ultimo esercizio è obbligatorio per gli Studenti dei CdS Civile e Ambientale

1) Dopo aver disegnato l'insieme $E \subset \mathbb{R}^3$ individuato da:

$$E := \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [-2,0],\ x^2 + y^2 - (2-z)^2 \le 0,\ \Big\},$$

determinare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} := \Big(x+ye^z, y-z+\sin x, z-\cos xy\Big)$ uscente dalla frontiera di E.

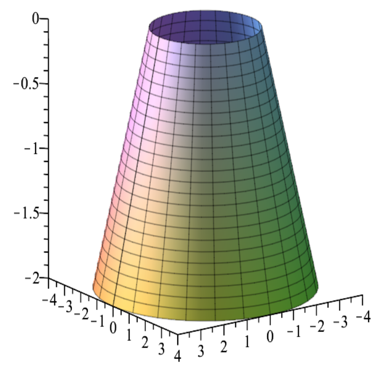
2) Sia $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$. Si determinino i punti $P = (x_0,y_0)$ del dominio e che appartengono alla bisettrice del primo e terzo quadratnte tali che $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = 1$ quando $v = (2^{-1/2}, 2^{-1/2})$.

3) Data la forma differenziale lineare $\Big(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{x\ln y}\Big)dx + \Big(\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} - \dfrac{\ln x}{y(\ln y)^2}\Big)dy$, determinarne il campo di esistenza, dire se è esatta. Se si, trovare la primitiva U tale che $U(x,x) \to 0$ se $x \to 0$.

civile) Sia $y(x)$ la soluzione di $y' - 2y = 8$ con $y(0) = 0$. Calcolare $\ln\Big(\dfrac{y(2)+4}{4}\Big)$.

Cenni di svolgimento

1) Individuiamo intanto l'insieme E. Se $z = -2$ allora $x^2+y^2 \le 16$; se $z = 0$ allora $x^2+y^2 \le 4$. Dalla disuguaglianza $x^2+y^2-(2-z)^2 \le 0$ si ottiene $-2 \le z \le 2-\sqrt{x^2+y^2}$, pertanto l'insieme E è il tronco di cono generato da $z = 2-x$, $x \in [2,4]$ (dominio regolare di $\mathbb{R}^3$).



Allora per il Teorema della Divergenza (che si può applicare)

$$\int_{FrE} \vec{F} \bullet \vec{n}_e \, dS \quad = \quad \iiint_E div\vec{F} \; dxdydz = 3\,\mathrm{vol}(E).$$

Resta quindi da calcolare il volume di E come differenza dei volumi di due coni (nel primo $z \in [-2, 2]$, nel secondo $z \in [0, 2]$).

$$\mathrm{vol}(E) = \pi \cdot 4^2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} - \pi \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{56}{3}\pi.$$

Il flusso del campo $\vec{F}$ uscente dalla frontiera di E è pari a 56π.

2) Sia $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 4\}$. Risulta $f \in C(E)$ e $\nabla f \in C(E^\circ)$ con

$$\nabla f(x, y) = \Big(-\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \Big) \quad \forall\ (x, y) \in E^\circ.$$

Poiché $f \in C^1(E^\circ)$ e v è un versore, allora

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x, y) = \nabla f(x, y) \bullet \big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x + y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Se imponiamo $(x, x) \in E^\circ$ e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x, x) = 1$ otteniamo $-\sqrt{2}x = \sqrt{4 - 2x^2}$ con $|x| < \sqrt{2}$. x deve essere quindi negativo e deve risolvere l'equazione $2x^2 = 4 - 2x^2$. L'unico punto che soddisfa l'equazione è $P = (-1, -1)$.

3) Deve risultare $A =]0,1[\times]0,1[$. Utilizziamo la definizione per studiare l'esattezza della forma differenziale lineare:

$$\begin{aligned}
U(x,y) &= \int\Big(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{x\ln y}\Big)dx = \arcsin x + \frac{\ln x}{\ln y} + g(y), \qquad g \in C^1(]0,1[) \\
\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\ln x}{y(\ln y)^2} + g'(y) = Y(x,y) \quad\Longleftrightarrow\quad g'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad\Longleftrightarrow \\
& \quad g(y) = \arcsin y + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
U(x,y) &= \arcsin x + \arcsin y + \frac{\ln x}{\ln y} + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Allora $U(x,x) = 2\arcsin x + 1 + c$, quindi $U(x,x) \to 0$ per $x \to 0$, se $c = -1$. La primitiva cercata è

$$\boldsymbol{U(x,y) = \arcsin x + \arcsin y + \frac{\ln x}{\ln y} - 1}.$$

civile) L'integrale generale della equazione è $y(x) = ce^{2x} - 4$ imponendo il dato iniziale $c = 4$. La soluzione cercata è $y(x) = 4e^{2x} - 4$ e quindi

$$\ln\Big(\frac{y(2)+4}{4}\Big) = \ln e^4 = 4.$$

Analisi Matematica II (Civile) 5 Settembre 2023
Modulo Analisi - Matematica II (Meccanica)

L'ultimo esercizio è obbligatorio per gli Studenti dei CdS Civile e Ambientale

1) Determinare i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ soggetti al vincolo $g(x,y) = x^4 + y^4 - 1 = 0$.

2) Dire se il campo di forze associato alla forma differenziale lineare $\omega = [1+\cos(x+y)]\,dx + \cos(x+y)\,dy$ è conservativo o meno. Calcolare il lavoro fatto dal campo di forze per spostare un punto materiale lungo la traiettoria individuata da $\gamma = (\cos^{50} t, \sin^{50} t)$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

3) Calcolare

$$\iiint_T z e^{x^2+y^2}\, dxdydz$$

quando $T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \le z \le 1\right\}$.

civile) Determinare le soluzioni del seguente problema di Cauchy:

$$y'(x) = (x + y(x))^2, \qquad y(0) = 0.$$

Cenni di svolgimento

1) Sia la funzione f che il vincolo g sono funzione in $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Inoltre $\nabla g(x,y) = (4x^3, 4y^3)$ che si annulla solo nell'origine (che non appartiene al vincolo). Se utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x = 4ax^3 \\ 2y = 4ay^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

La prima equazione è soddisfatta se $x = 0$ oppure $x^2 = \dfrac{1}{2a}$, $a > 0$. Se $x = 0$ allora $y = \pm 1$. Analogamente per la seconda equazione se $y = 0$ allora $x = \pm 1$ altrimenti $y^2 = \dfrac{1}{2a}$, $a > 0$. Se poniamo $x^2 = \dfrac{1}{2a}$, $y^2 = \dfrac{1}{2a}$ nella terza equazione si ottiene $\dfrac{1}{2a^2} = 1$

e quindi si ottengono 4 punti: $(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}})$. Per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti ($g(x,y) = 0$ è un compatto). Risulta

$$\begin{array}{ll} f(0,\pm1) = f(\pm1,0) = 1 & \text{minimi assoluti;} \\ f(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}) = \sqrt{2} & \text{massimi assoluti.} \end{array}$$

2) La forma differenziale lineare ω è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ e quindi ω è esatta se e solo se è chiusa. Risulta

$$\frac{\partial}{\partial y}[1 + \cos(x+y)] = -\sin(x+y) = \frac{\partial}{\partial x}\cos(x+y).$$

Calcoliamo allora la classe delle primitive

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int [1+\cos(x+y)]dx = x + \sin(x+y) + f(y), \quad f \in C^1(\mathbb{R}) \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) &= \cos(x+y) + f'(y) = \cos(x+y) \quad \Longleftrightarrow f(y) = c \\ U(x,y) &= x + \sin(x+y) + c \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Allora il campo di forze è conservativo e il lavoro è dato da:

$$L = \int_\gamma \omega = U(0,1) - U(1,0) = \sin 1 - 1 - \sin 1 = -1$$

3) Scriviamo l'insieme T in coordinate cilindriche: $(x = r\cos t, y = r\sin t, z)$

$$T \to \{(r,t,z) : z \in [0,1],\ t \in [0,2\pi],\ 0 \le r \le \sqrt{z}\}.$$

Risulta allora

$$\begin{aligned} \iiint_T z e^{x^2+y^2} dxdydz &= \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 zdz \int_0^{\sqrt{z}} re^{r^2} dr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 z(e^z - 1)dz = \\ &= \pi\Big[ze^z - e^z - \frac{z^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

civile) Poniamo $v(x) = x + y(x)$. Risulta $y'(x) = v'(x) - 1$. L'equazione differenziale diventa

$v'(x) = v^2(x) + 1$ equazione del primo ordine a variabili separabili

$$\int \frac{dv}{v^2+1} = \int dx = x + c$$

$\arctan v(x) = x + c, \qquad x + y(x) = \tan(x+c), \qquad y(x) = \tan(x+c) - x$

$0 = \tan(c), \quad c = 0, \quad \boldsymbol{y(x) = \tan(x) - x, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}.$

19 Settembre 2023

Modulo Analisi - Matematica II (Meccanica)

---

1) Calcolare il volume del solido $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-2)^2 + y^2 \leq z \leq 8 - 4x\}$.

2) Scrivere la superficie di rotazione ottenuta per rotazione intorno all'asse x della generatrice $z = e^{2x},\ x \in [0, 3]$. Dire se la superficie è regolare.

3) Determinare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} x^k.$$

Cenni di svolgimento

1) Scriviamo $T = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ (x-2)^2 + y^2 \leq z \leq 8 - 4x\}$. Per determinare D risolviamo la disequazione

$$(x-2)^2 + y^2 \leq 8 - 4x \quad \Longleftrightarrow \quad (x-2)^2 + 4(x-2) + 4 + y^2 - 4 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow$$
$$x^2 + y^2 \leq 4 := D.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \text{vol }(T) &= \iint_{x^2+y^2\leq 4} dxdy \int_{(x-2)^2+y^2}^{8-4z} dz = \iint_{x^2+y^2\leq 4} (4 - x^2 - y^2)\, dxdy = \\ &= \int_0^{2\pi} dt \int_0^2 r(4 - r^2) dr = 8\pi. \end{aligned}$$

2) La superficie S ha una rappresentazione parametrica $r : D \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$\begin{cases} x = x \\ y = e^{2x} \sin t \\ z = e^{2x} \cos t \end{cases} \qquad D := \{(x, t) : x \in [0, 3],\ t \in [0, 2\pi]\}.$$

Risulta: $r \in C^1(D)$, la superficie è semplice perché se $r(x_1, t_1) = r(x_2, t_2)$ allora necessariamente $x_1 = x_2 = x$. Allora $r(x, t_1) = r(x, t_2)$ ci fornisce $\sin t_1 = \sin t_2$ e

$\cos t_1 = \cos t_2$ e questo accade solo se $t_1 = t_2$. Calcoliamo ora la matrice delle derivate parziali

$$\begin{pmatrix} 1 & 2e^{2x}\sin t & 2e^{2x}\cos t \\ 0 & e^{2x}\cos t & -e^{2x}\sin t \end{pmatrix}.$$

Risulta allora $L = -2e^{4x} \neq 0$, quindi la superficie è regolare.

3) Se applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti otteniamo

$$\lim_{k\to\infty} \frac{((k+1)!)^2}{(k!)^2} \cdot \frac{(2k)!}{(2k+2)!} \cdot |x| = |x| \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{|x|}{4} < 1$$

se e solo se $|x| < 4$, quindi il raggio di convergenza della serie è $r = 4$.

8 Gennaio 2024

Analisi Matematica II (Civile) $\square$ **Analisi Matematica II (Elettronica e Informatica)** $\boxed{\text{II anno}}$ $\boxed{\text{altro}}$ **Modulo Analisi-Matematica II (Meccanica)** $\square$

---

1) Determinare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y) = x + y$ nell'insieme $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 2(2 - xy)\}$.

2) Studiare il comportamento (convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale) della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^2+1}$.

3) Data la lamina piana $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 4; 0 \leq y \leq 2x\}$ di densità unitaria, determinarne la massa e il baricentro.

4) Determinare l'integrale generale della equazione differenziale $x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = 2(1 - t + \sin t)$. Tra tutte le soluzioni determinare quelle per cui $\lim_{t\to 0} x(t) = \dfrac{4}{45}$.

Cenni di svolgimento

1) Proviamo che l'insieme A è un compatto. Innanzitutto

$$x^2 + 2y^2 \leq 2(2 - xy) \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + 2y^2 + 2xy \leq 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq (x+y)^2 + y^2 \leq 4$$
$$\Longrightarrow \quad y^2 \leq 4 \quad (|y| \leq 2) \quad \& \quad (x+y)^2 \leq 4 \quad \Longrightarrow \quad (|y| \leq 2) \quad \& \quad |x+y| \leq 2.$$

Quindi l'insieme A è limitato perché è contenuto nel parallelogramma individuato da

$$A \subset \{(x,y) : -2 \leq x + y \leq 2,\ |y| \leq 2\}.$$

Inoltre A è chiuso perché $A = g^{-1}([0,4])$ quando $g(x,y) = (x+y)^2 + y^2$. La funzione $f \in C^1(A)$ poiché è un polinomio e il suo gradiente non si annulla mai, pertanto i punti di massimo e di minimo assoluti, che esistono per Weierstrass, devono trovarsi sulla frontiera di A. Per determinarli basta osservare che gli insiemi di livello della funzione f assumono in A valori da -2 a 2. Quindi se sostituiamo in A al posto di $x + y$ il valore ± 2 otteniamo $y = 0$. Pertanto il minimo assoluto sarà $(-2, 0)$ mentre il massimo assoluto sarà $(2, 0)$.

2) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta

$$\frac{|\sin(nx)|}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} := L_n$$

La serie pertanto converge totalmente in $\mathbb{R}$ e dunque anche uniformemente, assolutamente e puntualmente.

3) Per calcolare l'integrale $m(E) = \iint_E dxdy$ passiamo alle coordinate ellittiche ponendo $x(t) = r\cos t,\ y(t) = 2r\sin t$. La lamina piana E risulta immagine del rettangolo $R := \{(r,t) :\ 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq t \leq \pi/4\}$. Poiché il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione è pari a $2r$ otteniamo

$$m(E) = \iint_R 2rdrdt = \int_0^{\pi/4} dt \int_0^1 2rdr = \frac{\pi}{4}.$$

Utilizzando sempre le coordinate ellittiche per il calcolo degli integrali, otteniamo che le coordinate del baricentro sono

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{m(E)} \iint_E xdxdy = \frac{4}{\pi} \iint_R 2r^2\cos t drdt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 2r^2 \cos t drdt = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \\ y_G &= \frac{1}{m(E)} \iint_E ydxdy = \frac{4}{\pi} \iint_R 4r^2\sin t drdt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 4r^2 \sin t drdt = \frac{4(4-2\sqrt{2})}{3\pi}. \end{aligned}$$

4) L'equazione differenziale data è lineare del secondo ordine completa

$$x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = -2t + 2 + 2\sin t.$$

L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea $z^2 - 2z - 3 = 0$ ha come soluzioni $z = 3, z = -1$ e dunque l'integrale generale della omogenea è dato da

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}.$$

Determiniamo ora una soluzione particolare di $x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = -2t + 2 \quad \rightarrow$ $x_1(t) = \frac{2}{3}t - \frac{10}{9}$.
Determiniamo una soluzione particolare di di $x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = 2\sin t \quad \rightarrow$ $x_2(t) = \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t$. Pertanto risulta

$$x(x) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + \frac{2}{3}t - \frac{10}{9} + \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t.$$

Per le soluzioni che soddisfano il limite dato deve risultare $c_1 + c_2 = 1$.

22 Gennaio 2024

Analisi Matematica II (Civile) Analisi Matematica II (Elettronica e Informatica) Modulo Analisi-Matematica II (Meccanica)

Le risposte non motivate non saranno prese in considerazione.

1) Scrivere in coordinate sferiche la superficie $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x \geq 0,\ z \geq 0\}$ e determinarne il bordo.(**Suggerimento**: per rappresentare la superficie utilizzare latitudine e longitudine: $x(\varphi, \theta) = r \cos\varphi \cos\theta,\ y(\varphi, \theta) = r \cos\varphi \sin\theta,\ z(\varphi, \theta) = r \sin\varphi, \quad r \geq 0,\ \varphi \in [0, \pi],\ \theta \in [-\pi, \pi]$.)

2) Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale $F(x, y, z) = \Big(5x^2 - 1 + \cos(e^{xz} - 1), 5y^2 - \log(1 + \arctan^2(xz)), 2y - \sin(xz)\Big)$ attraverso la superficie Σ orientata in modo che la normale sia concorde con l'asse positivo delle z.

3) Sviluppare in serie di soli seni la funzione $f(x) = x(\pi - x),\ x \in [0, \pi]$ e determinare la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n + 1)^3}$.

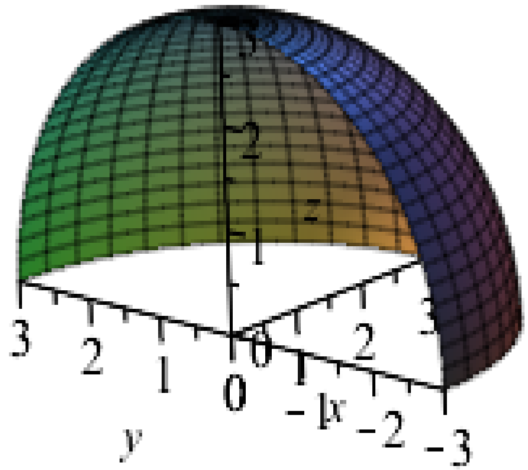
4) Determinare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y) = 4x^2 - 2xy + 6y^2 - 8x + 2y + 3$ nel rettangolo $Q = [0, 2] \times [-1, 1]$.

Cenni di svolgimento

1) La superficie Σ è una porzione di sfera (orientabile). Indicando con φ la latitudine e con θ la longitudine, una sua rappresentazione parametrica è data da $w : [0, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$ con

$$w(\varphi, \theta) = \begin{cases} x(\varphi, \theta) = 3 \cos\varphi \cos\theta \\ y(\varphi, \theta) = 3 \cos\varphi \sin\theta \\ z(\varphi, \theta) = 3 \sin\varphi. \end{cases}$$

($w \in C^2([0, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ e regolare).



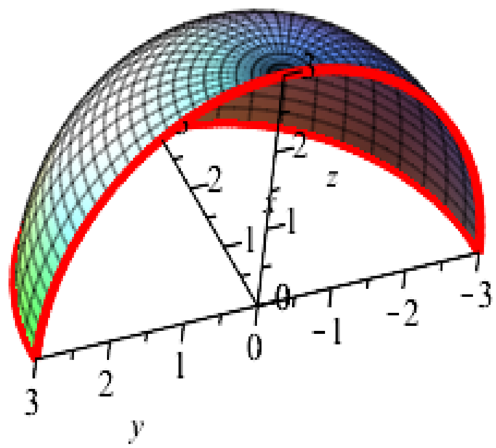
Determiniamo ora il suo bordo. Posto $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, risulta
$Fr(D) = \{(0,\theta),\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\} \cup \{(\varphi, \frac{\pi}{2}),\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}]\} \cup \{(\frac{\pi}{2}, \theta),\ \frac{\pi}{2} \geq \theta \geq -\frac{\pi}{2}\} \cup \{(\varphi, -\frac{\pi}{2}),\ \frac{\pi}{2} \geq \varphi \geq 0\}$.
Determiniamo ora $w(Fr(D))$. Si ha:

1. $w(0,\theta) = (3\cos\theta, 3\sin\theta, 0)$ quando $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$;
2. $w(\varphi, \frac{\pi}{2}) = (0, 3\cos\varphi, 3\sin\varphi)$ quando $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$;
3. $w(\frac{\pi}{2}, \theta) = (0,0,3)$ quando $\frac{\pi}{2} \geq \theta \geq -\frac{\pi}{2}$;
4. $w(\varphi, -\frac{\pi}{2}) = (0, -3\cos\varphi, 3\sin\varphi)$ quando $\frac{\pi}{2} \geq \varphi \geq 0$.

Ne deduciamo che il bordo $\partial\Sigma$ è dato da

$$\begin{aligned} \partial\Sigma = C_1 \cup C_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=9,\ x \geq 0,\ z=0\} \cup \\ &\quad \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2+z^2=9,\ x=0,\ z \geq 0\}, \end{aligned}$$

Dove la curva C_2 è ottenuta tramite 2. e 4. In particolare la C_2 è la semicirconferenza che si trova nel piano $x = 0$ e congiunge i punti $(0,3,0); (0,0,3); (0,-3,0)$.



La superficie Σ è dunque con bordo.

2) Risulta $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$, allora per calcolare il flusso applichiamo il teorema di Stokes. Riscriviamo il bordo della superficie in questo modo: $r_1(t) = (3\cos t, 3\sin t, 0)$ con $-\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ (una rappresentazione parametrica di C_1; $r_1'(t) = (-3\sin t, 3\cos t, 0)$) e $r_2(t) = (0, 3\cos t, 3\sin t)$ con $0 \le t \le \pi$ (una rappresentazione parametrica di C_2; $r_2'(t) = (0, -3\sin t, 3\cos t)$). In questo modo il bordo della superficie è percorso in modo che l'osservatore che lo percorre (e ha la testa rivolta verso l'alto) lascia la superficie alla propria sinistra.

$$\int_{\Sigma} \mathrm{rot} F\, dS = \int_{\partial\Sigma} F dr = \int_{C_1} F dr + \int_{C_2} F dr.$$

Risulta

$$\begin{aligned}
F(r_1(t)) \cdot r_1'(t) &= \left(45\cos^2 t, 45\sin^2 t, 6\sin t\right) \cdot (-3\sin t, 3\cos t, 0) = -135\sin t\cos^2 t + 135\cos t\sin^2 t \\
F(r_2(t)) \cdot r_2'(t) &= \left(0, 45\cos^2 t, 6\cos t\right) \cdot (0, -3\sin t, 3\cos t) = -135\sin t\cos^2 t + 18\cos^2 t.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$
\begin{aligned}
\int_{C_1} F dr &= 135\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(-\sin t\cos^2 t+\cos t\sin^2 t\big)dt = \frac{135}{3}\Big[\cos^3 t+\sin^3 t\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 90;\\
\int_{C_2} F dr &= \int_0^{\pi}(-135\sin t\cos^2 t+18\cos^2 t)dt = \Big[45\cos^3 t+9t+9\sin t\cos t\Big]_0^{\pi} = 9\pi-90;\\
\int_{\Sigma}\mathrm{rot}F dS &= 9\pi.
\end{aligned}
$$

3) Sia $g:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ la funzione dispari che coincide con f in $[0,\pi]$. Assumiamo che g sia 2π-periodica e calcoliamo i suoi coefficienti di Eulero Fourier (g è continua e derivabile con derivata limitata con $g(\pi)=0=g(-\pi)$).

$$
\begin{aligned}
a_n &= 0 \qquad n=0,1,2,\ldots,\\
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi-x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\Big(\int_0^{\pi}\pi x\sin nx dx-\int_0^{\pi}x^2\sin nx dx\Big)=\\
&= 2\int_0^{\pi} x\big(-\frac{\cos nx}{n}\big)'dx+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\big(\frac{\cos nx}{n}\big)'dx=\\
&= 2\Big[-x\frac{\cos nx}{n}\Big]_0^{\pi}+2\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx+\frac{2}{\pi}\Big[x^2\frac{\cos nx}{n}\Big]_0^{\pi}-\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}x\frac{\cos nx}{n}dx=\\
&= -\frac{2\pi}{n}(-1)^n+\frac{2}{n}\Big[\frac{\sin nx}{n}\Big]_0^{\pi}+\frac{2\pi}{n}(-1)^n-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\\
&= -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\Big(\frac{\sin nx}{n}\Big)'dx = -\frac{4}{n\pi}\Big[x\frac{\sin nx}{n}\Big]_0^{\pi}+\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx=\\
&= \frac{4}{\pi n^3}\cdot\Big[1-(-1)^n\Big] = \begin{cases} 0 & n=2k\\ \dfrac{8}{\pi(2k+1)^3} & n=2k+1\end{cases} \qquad n=1,2,\ldots
\end{aligned}
$$

Dunque la serie di Fourier di g convergerà uniformemente a

$$x(\pi-x)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\big((2k+1)x\big), \qquad 0\le x\le\pi.$$

In particolare se $x=\dfrac{\pi}{2}$ allora $\sin\big((2k+1)\frac{\pi}{2}\big)=(-1)^k$ e dunque

$$\frac{\pi^2}{4}=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}(-1)^k;$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}.$$

4) La funzione $f(x,y)=4x^2-2xy+6y^2-8x+2y+3$ è di classe $C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$. Determiniamo innanzitutto gli eventuali punti di massimo e di minimo relativi in Q°. In tali punti si dovrà annullare il gradiente $\nabla f(x,y) = \Big(8x-2y-8, -2x+12y+2\Big) = (0,0)$ se e solo se $(x,y)=(1,0)$. Risulta $H(1,0) = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}$ e dunque sia il determinante della matrice che $f''_{xx}(1,0)$ sono positivi. Pertanto il punto $(1,0)$ è di minimo relativo ($f(1,0)=-1$). Cerchiamo ora i punti di massimo/minimo assoluti, che devono esistere per il teorema di Weierstrass, sulla frontiera di Q. Risulta

- $f(x,-1) = g(x) = 4x^2-6x+7$ con $g:[0,2]\to\mathbb{R}$. $g'(x) = 8x-6 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq \frac{3}{4}$, pertanto lungo questa restrizione avremo un minimo in $x=\frac{3}{4}$ e due punti di massimo per $x=0, x=2$. ($g(0)=7,\ g(\frac{3}{4}) = \frac{19}{4},\ g(2)=11$).

- $f(2,y) = h(y) = 6y^2-2y+3$ con $h:[-1,1]\to\mathbb{R}$. $h'(y) = 12y-2 \geq 0 \Longleftrightarrow y \geq \frac{1}{6}$, pertanto lungo questa restrizione avremo un minimo in $x=\frac{1}{6}$ e due punti di massimo per $x=\pm1$. ($h(-1)=11,\ h(\frac{1}{6}) = \frac{17}{6},\ h(1)=7$).

- $f(x,1) = l(x) = 4x^2-10x+11$ con $l:[0,2]\to\mathbb{R}$. $l'(x) = 8x-10 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq \frac{5}{4}$, pertanto lungo questa restrizione avremo un minimo in $x=\frac{5}{4}$ e due punti di massimo per $x=0, x=2$. ($l(0)=11,\ l(\frac{5}{4}) = \frac{19}{4},\ l(2)=7$).

- $f(0,y) = m(y) = 6y^2+2y+3$ con $m:[-1,1]\to\mathbb{R}$. $m'(y) = 12y+2 \geq 0 \Longleftrightarrow y \geq -\frac{1}{6}$, pertanto lungo questa restrizione avremo un minimo in $x=-\frac{1}{6}$ e due punti di massimo per $x=\pm1$. ($m(-1)=7,\ m(-\frac{1}{6}) = \frac{17}{6},\ m(1)=11$).

I punti di massimo assoluto saranno pertanto i punti $(0,1),(2,-1)$, mentre il punto di minimo assoluto sarà $(1,0)$.

5 Febbraio 2024

Analisi Matematica II (Civile) ☐ **Analisi Matematica II (Elettronica e Informatica)** [II anno] [altro] **Modulo Analisi - Matematica II (Meccanica)** ☐

1) Calcolare il flusso del vettore $\vec{F} = (x + \sqrt{y^2 z + 2}, y - \sqrt{xz + 3}, z)$ uscente dal cilindro $\mathbf{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ z \in [-1, 1]\}$. Calcolare anche il flusso uscente dalla superficie laterale del cilindro.

2) Verificare che l'equazione $(x + 1)y^2 + \sin(xy) + 3(e^x - 1) = 0$ individua in un intorno di $(0, 0)$ una funzione di una sola variabile. Studiare il comportamento di tale funzione in un intorno di 0.

3) Data la forma differenziale lineare $\omega = \Big((x+1)e^{x-2y^2} - xy\Big)dx + \Big(3y^2 - 4xye^{x-2y^2} + x\Big)dy$, calcolare $\int_\gamma \omega$ quando γ è il tratto lineare che congiunge il punto $(1, 0)$ con il punto $(-1, 0)$ e la semicirconferenza di centro l'origine e raggio 1 che da $(-1, 0)$ torna in $(1, 0)$.

Cenni di svolgimento

1) Risulta $\vec{F} \in C^1(\mathbf{H})$, e $\mathbf{H}$ è un dominio regolare (rispetto al piano $z = 0$) di $\mathbb{R}^3$. Per calcolare il flusso allora è sufficiente applicare il teorema della divergenza. $\operatorname{div}\vec{F} = 3$ e dunque

$$\int_{Fr(\mathbf{H})} \vec{F} \cdot n_e \, dS \quad = \quad \iiint_{\mathbb{H}} 3 \, dxdydz = 3\mathrm{vol}\,(\mathbf{H}) = 6\pi.$$

Per calcolare il flusso uscente dalla superficie laterale basta sottrarre a 6π il flusso uscente dalla base inferiore e dalla base superiore. $B_{(k)} := \{(x, y, k) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$, $k = \pm 1$. La normale uscente dalle basi sarà data da $(0, 0, k)$, sempre per $k = \pm 1$. Pertanto

$$\int_{B_k} \vec{F} \cdot n_e \, dS \quad = \quad \iint_{B_k} dxdy = \mathrm{area}(B_k) = \pi, \qquad k = \pm 1.$$

Il flusso uscente dalla superficie laterale del cilindro sarà pari a 4π.

2) Sia $f(x,y)=(x+1)y^2+\sin(xy)+3(e^x-1)$. Risulta $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $(0,0)\in Z_f$. Inoltre $\nabla f(x,y)=\big(y^2+y\cos(xy)+3e^x, 2(x+1)y+x\cos(xy)\big)$ e $\nabla f(0,0)=\big(3,0\big)$. Per il teorema di Dini allora esiste un intorno U di $y=0$ ed una funzione $x=x(y)$ tale che $f(x(y),y)=0$ per ogni $y\in U$. Inoltre

$$x'(y)=-\frac{f'_y(x(y),y)}{f'_x(x(y),y)}=-\frac{2(x(y)+1)y+x(y)\cos(x(y)\cdot y)}{y^2+y\cos(x(y)\cdot y)+3e^{x(y)}}.$$

Pertanto $x'(0)=0$ ($y=0$ è un punto critico per $x=x(y)$) e $f''_{yy}(x,y)=2(x+1)-x^2\sin(xy)$. Allora

$$\begin{aligned} x''(y) &= -\frac{1}{[f'_x(x(y),y)]^2}\cdot\Big\{\big[f''_{yx}(x(y),y)\cdot x'(y)+f''_{yy}(x(y),y)\big]\cdot f'_x(x(y),y)+ \\ &- f'_y(x(y),y)\cdot\big[f''_{xx}(x(y),y)\cdot x'(y)+f''_{xy}(x(y),y)\big]\Big\}= \\ &= -\frac{f''_{yy}(x(y),y)}{f'_x(x(y),y)} \\ x''(0) &= -\frac{2}{3} \qquad y=0 \quad \text{punto di massimo per } x(y). \end{aligned}$$

3) La curva γ è chiusa, generalmente regolare e può essere parametrizzata da

$$r_1(t)=(t,0),\quad 1\ge t\ge -1;\qquad r_2(t)=(\cos t,\sin t),\quad \pi\ge t\ge 0.$$

$\omega\in C^1(\mathbb{R}^2)$, non ci sono buchi e dunque ω è esatta se e solo se ω è chiusa. Risulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} &= -4y(x+1)e^{x-2y^2}-x \\ \frac{\partial Y}{\partial x} &= -4y(x+1)e^{x-2y^2}+1. \end{aligned}$$

La ω dunque non è esatta non essendo chiusa. Possiamo però scrivere

$$\omega=\omega_1+\omega_2=\Big\{(x+1)e^{x-2y^2}dx+\Big(3y^2-4xye^{x-2y^2}\Big)dy\Big\}+\Big\{-xydx+xdy\Big\}.$$

Per quanto visto prima la ω_1 è esatta, dunque $\int_\gamma \omega_1=0$. Resta solo da calcolare

$$\int_\gamma \omega_2=\int_\gamma(-xydx+xdy).$$

Indichiamo con γ_1 la curva individuata da $r_1(t)=(t,0)$, $\quad 1\ge t\ge -1$ e con γ_2 quella individuata da $r_2(t)=(\cos t,\sin t)$, $\quad \pi\ge t\ge 0$. Banalmente $\int_{\gamma_1}(-xydx+xdy)=0$, mentre

$$\int_{\gamma_2}(-xydx+xdy) = \int_\pi^0(\cos t\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt=\Big[\frac{\sin^3 t}{3}\Big]_\pi^0+\int_\pi^0\cos^2 t\,dt=-\frac{\pi}{2}.$$

3 Aprile 2024

Analisi Matematica II (Civile) Analisi Matematica II (Elettronica e Informatica) Modulo Analisi - Matematica II (Meccanica)

---

1) Sia ω la forma differenziale lineare $\omega = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}dx + \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dy$. Dire se è esatta e in tal caso calcolare la classe delle sue primitive. Sia γ la curva che ammette la rappresentazione parametrica $(t, \cos t)$, $0 \le t \le \pi/2$; determinare $\int_\gamma \omega$.

2) Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione $f(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}$.

3) Calcolare la superficie laterale del paraboloide $z = \dfrac{x^2+y^2}{2}$ compreso tra i piani $z = 0$ e $z = 2$.

4) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + (\cos x)y = e^{-\sin x} \\ y(\pi) = \pi \end{cases}$$

Cenni di svolgimento

1) $X, Y \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\})$ e $X'_y = \dfrac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3} = Y'_x$. Dunque la ω è chiusa. Siccome $X(kx, ky) = k^{-2}X(x,y)$ per ogni $k > 0$ e lo stesso vale per Y allora ω è esatta e la classe delle primitive U è data da

$$U(x,y) = -\Big(x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + y\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\Big) + c = -\frac{x}{(x^2+y^2)} + c.$$

Allora

$$\int_\gamma \omega = U(\pi/2, 0) - U(0,1) = -\frac{2}{\pi}.$$

2) Risulta $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, pertanto i punti di massimo e di minimo vanno cercati tra i punti stazionari.

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} \dfrac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \\ \dfrac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-x^2+y^2 = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$$
$$\iff (\pm 1, 0)$$

Osserviamo che $f(1,0) = \dfrac{1}{2} = -f(-1,0)$. ($f$ è pari rispetto alla variabile y e dispari rispetto alla x). Risulta

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-2x(3+3y^2-x^2)}{(1+x^2+y^2)^3} & \dfrac{-2y(1-3x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^3} \\ \dfrac{-2y(1-3x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^3} & \dfrac{-2x(1+x^2-3y^2)}{(1+x^2+y^2)^3} \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$H(1,0) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad H(-1,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Pertanto il punto $(1,0)$ risulta di massimo relativo, $(-1,0)$ di minimo relativo. Infine, per determinare i punti di massimo e di minimo assoluti basta osservare che

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{1+x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} \iff -1 \leq \frac{2x}{1+x^2+y^2} \leq 1$$
$$\begin{cases} 2x \geq -1-x^2-y^2 \\ 2x \leq 1+x^2+y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} (1+x)^2+y^2 \geq 0 \\ (1-x)^2+y^2 \geq 0 \end{cases}$$

e queste due disequazioni sono verificate in $\mathbb{R}^2$, dunque i punti di massimo e di minimo relativo sono anche assoluti.

3) Il paraboloide è rappresentato in forma normale $z = \dfrac{x^2+y^2}{2}$ ed è definito nell'insieme dei punti del piano tali che $x^2+y^2 \leq 4$. Denotiamo con $A = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4\}$. L'insieme A in coordinate polari si può esprimere come $[0,2] \times [0,2\pi]$.
La superficie S del paraboloide è data da

$$\begin{aligned} S &= \iint_A \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy = \int_0^2 r\sqrt{1+r^2}\,dr \int_0^{2\pi} dt = \pi \int_0^2 2r\sqrt{1+r^2}\,dr = \\ &= \pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \Big[(1+r^2)^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{2\pi}{3}\Big(5\sqrt{5}-1\Big) \end{aligned}$$

4) L'equazione differenziale $y' + (\cos x)y = e^{-\sin x}$ è del primo ordine con $\alpha(x) = -\cos x$ e $\beta(x) = e^{-\sin x}$. Risulta $\int -\cos x dx = -\sin x$ e dunque l'integrale generale della equazione differenziale è dato da

$$y(x) = e^{-\sin x}\left\{\int e^{-\sin x}e^{\sin x}dx + c\right\} = e^{-\sin x}(x+c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Imponendo il dato iniziale si ottiene $y(x) = xe^{-\sin x}$.