

Studiamo il comportamento della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + 2} x^{2n+1}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Si tratta di una serie di segno qualunque. Sia $a_n = \frac{n^2+1}{n^3+2}x^{2n+1}$, consideriamo allora $|a_n| = \frac{n^2+1}{n^3+2}|x|^{2n+1}$. Applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + 1}{(n+1)^3 + 2} |x|^{2n+3} \cdot \frac{n^3 + 2}{n^2 + 1} \frac{1}{|x|^{2n+1}} = x^2$$

Dunque,

- se $x^2 < 1$, cioè $|x| < 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge e dunque $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;
- se $x > 1$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$;
- se $x < -1$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge a $+\infty$, siccome $a_n = -|a_n|$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge a $-\infty$;
- se $x = \pm 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+2}$. Applicando il criterio del confronto asintotico alla serie dei valori assoluti e utilizzando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ si ottiene che:
 - la serie data diverge a $+\infty$ se $x = 1$, infatti $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$,
 - la serie data diverge a $-\infty$ se $x = -1$, poiché $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} -|a_n|$.