

Utilizziamo la definizione di limite per provare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + x + 1} = 0.$$

Applicando la definizione bisogna provare che:

$\forall \varepsilon > 0$, esiste $M(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x > M(\varepsilon)$ risulta

$$-\varepsilon \leq \frac{x}{x^2 + x + 1} \leq +\varepsilon.$$

Senza perdita di generalità supponiamo $x > 0$, in tal modo $x^2 + x + 1 > x^2$

e dunque

$$-\varepsilon < 0 \leq \frac{x}{x^2 + x + 1} \leq \frac{1}{x}$$

Basta allora prendere

$$M(\varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$