

Calcoliamo il seguente limite adoperando i teoremi di L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\tan \frac{\pi}{2} x}.$$

Questo limite conduce, con un passaggio diretto, alla forma indeterminata 1^∞ .

Si osservi che poiché possiamo scrivere

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\tan \frac{\pi}{2} x} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\tan \frac{\pi}{2} x \log(2-x)}$$

basta studiare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{\pi}{2} x \log(2 - x)$$

che risulta una forma indeterminata del tipo $0 \cdot \infty$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{\pi}{2} x \log(2 - x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \frac{\pi}{2} x}{\log^{-1}(2 - x)}$$

che é un rapporto di due infiniti. Verifichiamo che si può adoperare la regola di L'Hospital. Le due applicazioni al numeratore ed al denominatore risultano continue e derivabili in un intorno del punto 1, inoltre la derivata del denominatore, essendo uguale a $\frac{\log^{-2}(2-x)}{(2-x)}$, risulta sempre diversa da

zero. Allora adoperando la regola di L'Hospital si ha

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \frac{\pi}{2} x}{\log^{-1}(2-x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{2} x} \frac{\pi}{2}}{\frac{\log^{-2}(2-x)}{(2-x)}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi (2-x) \log^2(2-x)}{2 \cos^2 \frac{\pi}{2} x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \log^2(2-x)}{2 \cos^2 \frac{\pi}{2} x} \\
 &= \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{2 \log(2-x)}{2-x}}{-2 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} x \sin \frac{\pi}{2} x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(2-x)}{(2-x) \cos \frac{\pi}{2} x \sin \frac{\pi}{2} x} \lim_{x \rightarrow 1} 2 \frac{\log(2-x)}{\sin \pi x} \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{-1}{2-x}}{\pi \cos \pi x} = \frac{2}{\pi}
 \end{aligned}$$

Avendo applicato per tre volte la regola di L'Hospital. Il risultato del limite risulta allora $e^{\frac{2}{\pi}}$.