Prove scritte di Analisi Matematica (Scienze di base per il Design)

A.A. 2018/2019

Corso di Laurea in Design

I appello - 8 Gennaio 2019

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\log\left(\frac{x^3+2}{x^3}\right)}{\sin\left(\frac{2}{x^2+3}\right)}.$$

2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\log 2} e^{2x}\arctan(e^x)\,dx.$$

Svolgimento

1) Il calcolo diretto conduce ad una forma indeterminata. Risulta tuttavia

$$L := \lim_{x\to+\infty} \frac{x\log\left(\frac{x^3+2}{x^3}\right)}{\sin\left(\frac{2}{x^2+3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\log\left(1+\frac{2}{x^3}\right)}{\frac{2}{x^3}} \frac{2}{x^3} \frac{\frac{2}{x^2+3}}{\sin\left(\frac{2}{x^2+3}\right)} \frac{x^2+3}{2}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{2}{x^3}\right)}{\frac{2}{x^3}} \frac{\frac{2}{x^2+3}}{\sin\left(\frac{2}{x^2+3}\right)} \frac{x^3+3x}{x^3} = 1$$

utilizzando i limiti notevoli $\lim_{x\to0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 = \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x}$ e tenendo presente che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+3x}{x^3} = 1$.

2) Operando la sostituzione $t = e^x$. da cui $dt = e^x\, dx$, l'integrale diventa

$$I := \int_0^{\log 2} e^{2x} \arctan(e^x)\, dx = \int_1^2 t \arctan t\, dt.$$

Utilizzando infine il procedimento di integrazione per parti si ha

$$I = \frac{t^2}{2}\arctan t\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{t^2}{t^2+1}\, dt = \frac{t^2}{2}\arctan t\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt$$
$$= \frac{t^2}{2}\arctan t\Big|_1^2 - \frac{t}{2}\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\arctan t\Big|_1^2 = \frac{5}{2}\arctan 2 - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

II appello - 22 Gennaio 2019

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\log(3x+1))}{3x^6-\tan(3x^2)}.$$

2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \arctan\left(1+\frac{2}{t}\right)\, dt.$$

Svolgimento

1) Il calcolo diretto conduce ad una forma indeterminata. Risulta tuttavia

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\log(3x+1))}{3x^6-\tan(3x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\log(3x+1))}{\log^2(3x+1)}\frac{\log^2(3x+1)}{9x^2}\frac{9x^2}{3x^2\left(x^4-\frac{\tan(3x^2)}{3x^2}\right)}$$
$$= -\frac{3}{2},$$

utilizzando i limiti notevoli $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos}{x^2} = \frac{1}{2}$.

2) Integrando per parti si ha:

$$\begin{aligned}
I := & \int \arctan\left(1+\frac{2}{t}\right)\,dt \\
= & \ t\arctan\left(1+\frac{2}{t}\right) - \int t\left(-\frac{2}{t^2}\right)\frac{1}{1+(1+2/t)^2}\,dt \\
= & \ t\arctan\left(1+\frac{2}{t}\right) + 2\int\frac{t}{t^2+(t+2)^2}\,dt \\
= & \ t\arctan\left(1+\frac{2}{t}\right) + \int\frac{t}{t^2+2t+2}\,dt \\
= & \ t\arctan\left(1+\frac{2}{t}\right) + \frac{1}{2}\int\frac{2t+2-2}{t^2+2t+2}\,dt \\
= & \ t\arctan\left(1+\frac{2}{t}\right) + \frac{1}{2}\log\left(t^2+2t+2\right) - \int\frac{1}{(t+1)^2+1}\,dt \\
= & \ t\arctan\left(1+\frac{2}{t}\right) + \frac{1}{2}\log\left(t^2+2t+2\right) - \arctan(t+1) + c,
\end{aligned}$$

$c \in \mathbb{R}$.

III appello - 5 Febbraio 2019

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(1+\sin\left(\frac{1}{x^2-2}\right)\right)(2x^2+3).$$

2) Studiare la funzione

$$f(x)=\frac{7+x^2}{x-3},$$

tracciandone un grafico approssimativo.

Svolgimento

1) Il calcolo diretto conduce ad una forma indeterminata. Osserviamo tuttavia che

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(1+\sin\left(\frac{1}{x^2-2}\right)\right)(2x^2+3) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\sin\left(\frac{1}{x^2-2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2-x^2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2-2}\right)}{\frac{1}{x^2-2}} \frac{2x^2+3}{x^2-2} = 2,$$

tenendo presenti i limiti notevoli $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2) La funzione data è ben definita per ogni $x \neq 3$, dunque $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, e non presenta simmetrie. Per quanto riguarda il segno, risulta $f(x) = \frac{7+x^2}{x-3} > 0$ se e solo se $x-3>0$, dunque $f(x)>0$ per $x>3$, mentre $f(x)<0$ per $x<3$. Non ci sono intersezioni con l'asse delle x, in quanto $f(x) \neq 0$, per ogni $x \in D(f)$, mentre essendo $f(0) = -\frac{7}{3}$, il grafico di f interseca l'asse y nel punto $\left(0, -\frac{7}{3}\right)$.

Studiamo ora gli eventuali asintoti. Risulta

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{7+x^2}{x-3} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{7+x^2}{x-3} = -\infty,$$

per cui non ci sono asintoti orizzontali. Essendo poi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7+x^2}{x^2-3x} = 1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x},$$
$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+7}{x-3} = 3 = \lim_{x\to-\infty} [f(x)-x],$$

la retta di equazione $y = x+3$ è un asintoto obliquo, sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$.

Infine risulta

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{7+x^2}{x-3} = -\infty, \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{7+x^2}{x-3} = +\infty,$$

la retta di equazione $x = 3$ è un asintoto verticale sia da sinistra che da destra per il grafico di f.

La funzione data è anche derivabile in $D(f)$, essendo quoziente e somma di funzioni derivabili, e risulta

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{(x-3)^2}.$$

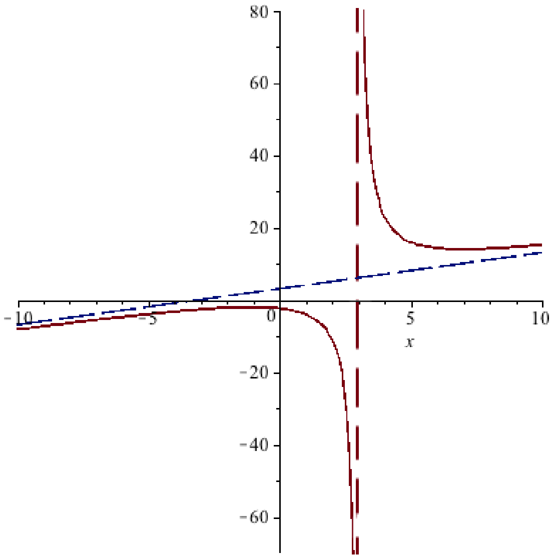
Pertanto $f'(x) > 0$ se e solo se $(x^2 - 6x - 7) > 0$, ovvero per $x < -1$ oppure $x > 7$, mentre $f'(x) < 0$ per $-1 < x < 3$ oppure $3 < x < 7$. La funzione è dunque crescente in $(-\infty, -1]$ e in $[7, +\infty)$, decrescente in $[-1, 3[$ e in $]3, 7]$: il punto -1 è di massimo relativo, mentre il punto 7 è di minimo relativo. Ovviamente non ci sono massimi, né minimi assoluti, in quanto f non è limitata né superiormente né inferiormente.

Anche $f'(x)$ é derivabile in $D(f)$ e risulta

$$f''(x) = \frac{32}{(x-3)^3},$$

da cui $f''(x) > 0$ se e solo se $x > 3$: la funzione è dunque concava in $(-\infty, 3[$, convessa in $]3, +\infty)$.

Il grafico approssimativo della funzione è il seguente:



IV appello - 28 Maggio 2019

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\tan\left(\frac{2}{\sqrt{x}+3}\right)}{\sqrt{x}(e^{\frac{1}{x}}-1)}+\sin\left(\frac{2}{x}\right)\right].$$

2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos x+2}.$$

Svolgimento

1) Il calcolo diretto conduce ad una forma indeterminata per quanto riguarda il primo addendo, mentre ovviamente $\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{2}{x}\right) = 0$. Risulta inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\tan\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}+3}\right)}{\sqrt{x}(e^{\frac{1}{x}}-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\tan\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}+3}\right)}{\dfrac{2}{\sqrt{x}+3}} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}-1} = 2,$$

tenendo presenti i limiti notevoli $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$. Pertanto il limite richiesto è pari a 2.

2) Operando la sostituzione $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, da cui $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ e $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$, l'integrale diventa

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x + 2} = \int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\,dt = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$