Prove scritte di Analisi Matematica 1 - A.A. 2018/2019

Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica ed Elettronica

I appello - 8 Gennaio 2019

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\,[\log(x^3+2)-\log(x^3)]}{\sqrt{2+x^4}-\sqrt{x^4-3}}.$$

2) Date le funzioni

$$f(x)=e^{x^2}-1-\log(1+x^3) \text{ e } \; g(x)=\sin(2x)$$

si chiede di

(a) fornire gli sviluppi in serie di McLaurin fino all'ordine di 3 di $f(x)$ e $g(x)$, dopo averne determinato il campo di sviluppabilità;

(b) calcolare l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ rispetto a $g(x)$, per $x\to 0$.

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\log 4}^{\log 5} \frac{1}{e^{2x}-4e^x+3}\,dx.$$

Svolgimento

1) Il calcolo diretto conduce ad una forma indeterminata. Risulta tuttavia

$$\begin{aligned}
L := \lim_{x\to+\infty} \frac{x\,[\log(x^3+2)-\log(x^3)]}{\sqrt{2+x^4}-\sqrt{x^4-3}} &= \\
= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\log\left(1+\frac{2}{x^3}\right)}{\sqrt{2+x^4}-\sqrt{x^4-3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\log\left(1+\frac{2}{x^3}\right)}{\frac{2}{x^3}} \frac{2}{x^3} \frac{\sqrt{2+x^4}+\sqrt{x^4-3}}{(2+x^4)-(x^4-3)} &= \\
= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{2}{x^3}\right)}{\frac{2}{x^3}} \frac{2}{x^2} \frac{x^2\left(\sqrt{\frac{2}{x^4}+1}+\sqrt{1-\frac{3}{x^4}}\right)}{5} &= \frac{4}{5},
\end{aligned}$$

utilizzando il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$.

2) (a) Tenendo presenti gli sviluppi noti

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots,$$

per $-1 < x \leq 1$ e infine

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, possiamo dedurre che la funzione $f(x)$ è sviluppabile in serie di McLaurin se $-1 < x^3 \leq 1$, ovvero per $-1 < x \leq 1$, e si ha

$$e^{x^2} - 1 = x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} + \dots = x^2 + o(x^3), \quad \log(1+x^3) = x^3 - \frac{(x^3)^2}{2} + \dots = x^3 + o(x^3),$$

da cui

$$f(x) = x^2 - x^3 + o(x^3),$$

per $-1 < x \leq 1$. Per quanto riguarda la funzione $g(x)$ si ha

$$g(x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \dots = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3),$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(b) Utilizzando gli sviluppi trovati al punto (a) ed il principio di sostituzione degli infinitesimi risulta, per $\alpha = 2$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{|x^2 - x^3 + o(x^3)|}{|2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)|^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4},$$

da cui l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ rispetto a $g(x)$ è 2, per $x \to 0$.

3) Effettuando la sostituzione $t = e^x$, da cui $dx = \frac{dt}{t}$, l'integrale diventa

$$I := \int_{\log 4}^{\log 5} \frac{1}{e^{2x} - 4e^x + 3}\, dx = \int_4^5 \frac{1}{t(t^2 - 4t + 3)}\, dt = \int_4^5 \frac{1}{t(t-3)(t-1)}\, dt.$$

Utilizziamo ora la formula di Hermite. Risulta

$$\frac{1}{t(t-3)(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} + \frac{C}{t-1} = \frac{At^2 - 4At + 3A + Bt^2 - Bt + Ct^2 - 3Ct}{t(t-3)(t-1)}$$

se e solo se $\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -4A - B - 3C = 0 \\ 3A = 1 \end{cases}$ da cui $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{6}$ e $C = -\frac{1}{2}$. Pertanto

$$I = \frac{1}{3}\int_4^5 \frac{dt}{t} + \frac{1}{6}\int_4^5 \frac{dt}{t-3} - \frac{1}{2}\int_4^5 \frac{dt}{t-1} = \frac{1}{3}\log|t|\Big|_4^5 + \frac{1}{6}\log|t-3|\Big|_4^5 - \frac{1}{2}\log|t-1|\Big|_4^5$$
$$= -\frac{3}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{3}\log 5.$$

II appello - 22 Gennaio 2019

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite, utilizzando la teoria degli infinitesimi:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\sin(2x)+6x^6+\cos(\log(3x+1))-1}{(e^{\sqrt{x}}-1)^6+\tan(x^3)-3x^2}.$$

2) Dato l'insieme

$$A = [0,1[\cup \left\{ \frac{6n-1}{3n},\ n=1,2,\dots \right\},$$

si chiede di

(a) determinare $Is(A)$, A', $\overline{A}$, A°, $Fr(A)$;

(b) stabilire se A è chiuso, aperto, limitato, compatto, connesso.

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \arctan\left(1+\frac{2}{t}\right)\, dt.$$

Svolgimento

1) La funzione al numeratore $f(x)$ è somma di tre infinitesimi, per $x \to 0^+$. L'ordine di $x^2 \sin(2x)$ rispetto a x è 3, per $x \to 0^+$, mentre l'ordine di x^6 è 6. Infine, essendo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\log(3x+1))-1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\log(3x+1))-1}{\log^2(3x+1)} \cdot \frac{9\ \log^2(3x+1)}{(3x)^2} = -\frac{9}{2},$$

l'ordine di infinitesimo di $\cos(\log(3x+1))-1$ è 2, pertanto l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ è 2.

La funzione al denominatore $g(x)$ ha invece ordine di infinitesimo 2 rispetto a x, per $x \to 0^+$, poiché

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)^6}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}\right)^6 = 1,$$

(quindi $(e^{\sqrt{x}}-1)^6$ ha ordine 3), l'ordine di infinitesimo di $\tan(x^3)$ è 3 e l'ordine di infinitesimo di $3x^2$ è 2. Pertanto, applicando il principio di sostituzione degli infinitesimi, risulta

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\log(3x+1))-1}{-3x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(\log(3x+1))}{\log^2(3x+1)} \cdot \frac{3\ \log^2(3x+1)}{(3x)^2} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

2) Poniamo $a_n := \dfrac{6n-1}{3n} = 2 - \dfrac{1}{3n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

(a) Risulta $Is(A) = \{a_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$. Fissato infatti $n \in \mathbb{N}$, è sufficiente scegliere

$$0 < r < \min\{|a_n - a_{n+1}|, |a_n - a_{n-1}|\} = |a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{3n} - \frac{1}{3(n+1)} = \frac{1}{3n(n+1)}$$

per avere $B(a_n, r) \cap A = \{a_n\}$.

Risulta poi $A' = [0,1] \cup \{2\}$. Proviamo che $2 \in A'$. Fissato $r > 0$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in B(2, r)$, da cui $B(2, r) \cap A \setminus \{2\} \neq \emptyset$: infatti per avere $|a_n - 2| = \left|2 - \frac{1}{3n} - 2\right| = \frac{1}{3n} < r$, basta scegliere $n > \frac{1}{3r}$.

Si ha poi $\overline{A} = A' \cup Is(A) = [0,1] \cup \{2\} \cup \{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ e $A^\circ =]0,1[$, poiché soltanto per i punti dell'intervallo aperto $]0,1[$ è verificata la proprietà che esiste una boccia centrata nel punto e tutta contenuta dentro l'insieme A.

Infine, tenendo conto del fatto che tutti i punti isolati sono anche di frontiera, che il punto 2 è di frontiera (poiché per ogni $r > 0$, $B(2,r) \cap A \neq \emptyset$ e $B(2,r) \cap A^c \neq \emptyset$) e che i punti 0 e 1 sono di frontiera per $[0,1]$, si conclude che $\mathrm{Fr}(A) = \{0,1,2\} \cup \{a_n, \ n = 1,2,\dots\}$.

(b) L'insieme A non è chiuso, in quanto $\overline{A} \neq A$, e dunque non è compatto; non è nemmeno aperto, essendo $A^\circ \neq A$. A è invece limitato, essendo ad esempio $A \subset [0,2]$. L'insieme, infine, non è connesso: basta infatti considerare, ad esempio, $B =]-3,1[$, $C =]1,3[$ per avere

- $(B \cap A) \neq \emptyset, \quad (C \cap A) \neq \emptyset,$
- $(B \cap A) \cap (C \cap A) = \emptyset,$
- $(B \cap A) \cup (C \cap A) = A.$

3) Integrando per parti si ha:

$$
\begin{aligned}
I &:= \int \arctan\left(1 + \frac{2}{t}\right) dt \\
&= t \arctan\left(1 + \frac{2}{t}\right) - \int t \left(-\frac{2}{t^2}\right) \frac{1}{1 + (1 + 2/t)^2} \, dt \\
&= t \arctan\left(1 + \frac{2}{t}\right) + 2 \int \frac{t}{t^2 + (t+2)^2} \, dt \\
&= t \arctan\left(1 + \frac{2}{t}\right) + \int \frac{t}{t^2 + 2t + 2} \, dt
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= t \arctan\left(1+\frac{2}{t}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{2t+2-2}{t^2+2t+2}\,dt \\
&= t \arctan\left(1+\frac{2}{t}\right) + \frac{1}{2}\log\left(t^2+2t+2\right) - \int \frac{1}{(t+1)^2+1}\,dt \\
&= t \arctan\left(1+\frac{2}{t}\right) + \frac{1}{2}\log\left(t^2+2t+2\right) - \arctan(t+1) + c,
\end{aligned}$$

$c \in \mathbb{R}$.

III appello - 5 Febbraio 2019

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(\cos\left(\frac{2}{2-x^2}\right)\right)(x^4+3).$$

2) Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^3}}(3x+1)^{n+1}.$$

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{2x^2-5}}\,dx.$$

Svolgimento

1) Il calcolo diretto conduce ad una forma indeterminata. Osserviamo tuttavia che

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(\cos\left(\frac{2}{2-x^2}\right)\right)(x^4+3) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(1+\left(\cos\left(\frac{2}{2-x^2}\right)-1\right)\right)(x^4+3)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\left(\cos\left(\frac{2}{2-x^2}\right)-1\right)\right)}{\cos\left(\frac{2}{2-x^2}\right)-1} \frac{\cos\left(\frac{2}{2-x^2}\right)-1}{\frac{4}{(2-x^2)^2}} \frac{4(x^4+3)}{(2-x^2)^2} = -2,$$

dal momento che $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$.

2) La serie data è a termini di segno qualunque e, posto $a_n := \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^3}}(3x+1)^{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, risulta $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ se $x = -\frac{1}{3}$, dunque in tal caso la serie banalmente converge. Se $x \neq -\frac{1}{3}$ studiamo la convergenza assoluta, tramite il criterio del rapporto: poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\sqrt{(n+1)^3}}(3x+1)^{n+2}}{\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^3}}(3x+1)^{n+1}} \right|$$

$$= |3x+1| \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{(n+1)^3}} \frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}} \frac{n}{n+1} \frac{\frac{1}{n}}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \right| = |3x+1|,$$

la serie converge assolutamente, e dunque converge, se $|3x+1| < 1$. Poiché tale disequazione é verificata per $-\frac{2}{3} < x < 0$, la serie é convergente assolutamente, e dunque è convergente, in $\left]-\frac{2}{3}, 0\right[$.

Se $x > 0$ la serie è a termini di segno positivo, dunque diverge in quanto diverge assolutamente, per quanto visto prima.

Se $x < -\frac{2}{3}$ la serie é a termini di segno alterno e risulta indeterminata, per un criterio di indeterminatezza: infatti, per quanto visto prima, in tal caso si ha $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |3x+1| > 1$ da cui, per definizione di limite, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_{n+1}| > |a_n|$, per ogni $n \geq \bar{n}$, ovvero $(|a_n|)_n$ é definitivamente crescente.

Se $x = 0$ la serie é a termini di segno positivo e diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^3}}.$$

Osserviamo che $a_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^3}} \sim \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ e, poiché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ è convergente, per il criterio del confronto asintotico la serie data converge se $x = 0$.

Se $x = -\frac{2}{3}$ la serie é a termini di segno alterno e diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^3}}.$$

Osserviamo che risulta $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^3}} = 0$ e la successione $(|a_n|)_n$ è decrescente: infatti

$$|a_{n+1}| = \frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\sqrt{(n+1)^3}} < \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^3}} = |a_n|,$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Pertanto la serie converge, dal criterio di Leibnitz.

In conclusione la serie data converge se $-\frac{2}{3} \leq x \leq 0$, diverge se $x > 0$, é indeterminata se $x < -\frac{2}{3}$.

3) Si tratta dell'integrale di un differenziale binomio del tipo $\int x^m(ax^p + b)^n\, dx$. Essendo nel nostro caso $n = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, mentre $\frac{m+1}{p} = 0 \in \mathbb{Z}$, una sostituzione possibile è $t^2 = 2x^2 - 5$, da cui $x = \sqrt{\frac{t^2+5}{2}}$ e $dx = \frac{t}{\sqrt{2(t^2+5)}}\, dt$: l'integrale diventa allora

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x\sqrt{2x^2-5}}\, dx = \int \frac{dt}{t^2+5} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{\left(\frac{t^2}{\sqrt{5}}\right) + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\left(\sqrt{\frac{2x^2-5}{5}}\right) + C, \end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$.

IV appello - 28 Maggio 2019

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{4x^2-2}}{x(e^{\frac{1}{x^2}}-1)}+\tan\left(\frac{2}{x^2+3}\right)\right].$$

2) Studiare i punti di continuità della funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita come

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n+2}, & x=\frac{1}{n},\ n=1,2,3,\dots\\ \frac{\sin(4x)}{2x}+2, & x>0,\ x\neq\frac{1}{n},\ n=1,2,3,\dots\\ |x-1|, & x\leq 0,\ x\in\mathbb{Q},\\ x+3, & x<0,\ x\notin\mathbb{Q},\end{cases}$$

classificando gli eventuali punti di discontinuità.

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{(\cos x+5)^2}\,dx.$$

Svolgimento

1) Il calcolo diretto conduce ad una forma indeterminata per quanto riguarda il primo addendo, mentre ovviamente $\lim_{x\to+\infty}\tan\left(\frac{2}{x^2+3}\right)=0$. Risulta inoltre

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{4x^2-2}}{x(e^{\frac{1}{x^2}}-1)} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{4x^2-2}}\frac{1}{x(e^{\frac{1}{x^2}}-1)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{2x\left(\sqrt{1+\frac{3}{4x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{4x^2}}\right)}\frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}-1}x\\ &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

tenendo presenti il limite notevole $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$. Pertanto il limite richiesto è pari a $\frac{5}{4}$.

2) Ponendo $a_n:=\dfrac{1}{n}$, $n=1,2,\ldots$ e $A=\{a_n,\ n=1,2,,\ldots\}$, tutti i punti a_n sono di discontinuità di prima specie eliminabile poiché, fissato $n\in\mathbb{N}$, risulta

$$\lim_{x\to a_n}f(x)=\lim_{x\to a_n}\left[\frac{\sin(4x)}{2x}+2\right]=\left[\frac{\sin\left(\frac{4}{n}\right)}{\frac{2}{n}}+2\right],$$

mentre $f(a_n)=\frac{1}{n+2}\neq\left[\frac{\sin\left(\frac{4}{n}\right)}{\frac{2}{n}}+2\right]$ per ogni $n\in\mathbb{N}$: basta infatti osservare che, ad esempio, $\left[\frac{\sin\left(\frac{4}{n}\right)}{\frac{2}{n}}+2\right]>2$, mentre $\frac{1}{n+2}<\frac{1}{2}$, per ogni $n=1,2,\ldots$.

I punti $x>0$, $x\neq a_n$, sono invece di continuità perché qui la funzione è somma, composizione, prodotto e quoziente di funzioni continue.

Sui punti $x_0<0$ la funzione segue una legge di tipo Dirichlet e risulta

$$\lim_{x\to x_0,x\in\mathbb{Q}}f(x)=\lim_{x\to x_0,x\in\mathbb{Q}}(1-x)=1-x_0,\quad \lim_{x\to x_0,x\notin\mathbb{Q}}f(x)=\lim_{x\to x_0,x\notin\mathbb{Q}}(x+3)=x_0+3:$$

essendo $1-x_0=x_0+3$ se e solo se $x_0=-1$, concludiamo che il punto -1 è di continuità per f, mentre tutti i punti $x_0<0$, $x_0\neq-1$ sono di discontinuità di seconda specie.

Per quanto riguarda il punto 0 si ha infine

$$\lim_{x\to 0^+, x\in A} f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+, x\notin A} f(x) = \lim_{x\to 0^+, x\notin A} \left[\frac{\sin(4x)}{2x} + 2\right] = \lim_{x\to 0^+, x\notin A} \left[\frac{\sin(4x)}{4x} 2 + 2\right] = 4,$$

da cui 0 è punto di discontinuità di seconda specie, dal momento che non esiste $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (si può verificare che non esiste nemmeno $\lim_{x\to 0^-} f(x)$).

3) Utilizzando il procedimento di integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{(\cos x+5)^2}\,dx = \frac{x}{\cos x+5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x+5}\,dx \\ &= \frac{\pi}{10} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x+5}\,dx \end{aligned}$$

Operando ora la sostituzione $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, da cui $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ e $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$, l'integrale diventa

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{10} - \int_0^1 \frac{2}{6+4t^2}\,dt = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}t\right)^2} \\ &= \frac{\pi}{10} - \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}t\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right). \end{aligned}$$