Prove scritte di Analisi Matematica (Scienze di base per il Design)

A.A. 2017/2018

Corso di Laurea in Design

I appello - 9 Gennaio 2018

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{n^3-n+2}{n^3-2n+3}\right)^{n\log n}\right]\arctan\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}\right).$$

2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\log 2}\frac{5e^{2x}}{e^{2x}-e^x-6}\,dx.$$

Svolgimento

1) Il calcolo diretto conduce ad una forma indeterminata. Risulta tuttavia

$$L_1 := \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^3-n+2}{n^3-2n+3}\right)^{n\log n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n-1}{n^3-2n+3}\right)^{n\log n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{n-1}{n^3-2n+3}\right)^{\frac{n^3-2n+3}{n-1}}\right]^{\frac{n^2\log n-n\log n}{n^3-2n+3}} = 1,$$

utilizzando il limite notevole $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ e tenendo presente che l'ordine di infinito di $\left(n^2\log n - n\log n\right)$ è inferiore a quello di (n^3-2n+3), per $n\to+\infty$.

Inoltre

$$L_2 := \lim_{n\to+\infty}\arctan\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\arctan\left(n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{\pi}{2},$$

pertanto risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{n^3-n+2}{n^3-2n+3}\right)^{n\log n}\right]\arctan\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

2) Effettuando la sostituzione $t=e^x$, da cui $dt = e^x\,dx$, l'integrale diventa

$$I := \int_0^{\log 2}\frac{5e^{2x}}{e^{2x}-e^x-6}\,dx = \int_1^2\frac{5t}{t^2-t-6}\,dt = \int_1^2\frac{5t}{(t-3)(t+2)}\,dt.$$

Utilizziamo ora la formula di Hermite: risulta

$$\frac{5t}{(t-3)(t+2)} = \frac{A}{t-3}+\frac{B}{t+2} = \frac{At+2A+Bt-3B}{(t-3)(t+2)}$$

se e solo se $\begin{cases} A+B=5, \\ 2A-3B=0 \end{cases}$ da cui $A=3$ e $B=2$. Pertanto

$$\int_1^2\frac{5t}{(t-3)(t+2)} = \int_1^2\frac{3}{t-3}\,dt+\int_1^2\frac{2}{t+2}\,dt$$
$$= \Big[3\log|t-3|+2\log|t+2|\Big]_1^2 = \log 2 - 2\log 3.$$

II appello - 23 Gennaio 2018

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[1 - \cos\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}\right)\right](2x+1).$$

2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \log\left(1 + \frac{1}{1+t^2}\right) dt.$$

Svolgimento

1) Il calcolo diretto conduce ad una forma indeterminata. Risulta tuttavia

$$\begin{aligned} L := & \lim_{x\to+\infty}\left[1-\cos(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})\right](2x+1) \\ = & \lim_{x\to+\infty}\left[1-\cos\left(\frac{4}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}\right)\right](2x+1) \\ = & \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos\left(\frac{4}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}\right)}{\frac{16}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})^2}}\frac{16(2x+1)}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})^2} \end{aligned}$$

Pertanto, utilizzando il limite notevole $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ e tenendo presente che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{16(2x+1)}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{32x+16}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)^2}=8$$

si conclude che $L=4$.

2) Utilizzando il procedimento di integrazione per parti risulta

$$I=\left[t\log\left(1+\frac{1}{1+t^2}\right)\right]_0^1+\int_0^1\frac{2t^2}{(t^2+1)(t^2+2)}\,dt.$$

Per risolvere l'ultimo integrale utilizziamo la formula di Hermite. Risulta

$$\frac{2t^2}{(t^2+1)(t^2+2)}=\frac{At+B}{t^2+1}+\frac{Ct+D}{t^2+2}=\frac{At^3+2At+Bt^2+2B+Ct^3+Ct+Dt^2+D}{(t^2+1)(t^2+2)}$$

se e solo se $\begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 2 \\ 2A + C = 0 \\ 2B + D = 0 \end{cases}$ da cui $A = C = 0$, $B = -2$ e $D = 4$. Pertanto

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2t^2}{(t^2+1)(t^2+2)}\,dt &= -2\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt + 4\int_0^1 \frac{1}{t^2+2}\,dt \\ &= -2[\arctan t]_0^1 + 2\sqrt{2}\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1 \\ &= -\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \end{aligned}$$

da cui infine

$$I = \log\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

III appello - 6 Febbraio 2018

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 2} \frac{1-\cos(x^2-4)}{\tan^2(x-2)}.$$

2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \sin^2 x}\, dx.$$

Svolgimento

1) Il calcolo diretto conduce ad una forma indeterminata. Osserviamo tuttavia che

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-\cos(x^2-4)}{\tan^2(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1-\cos(x^2-4)}{(x^2-4)^2}\frac{(x-2)^2}{\tan^2(x-2)}(x+2)^2=8,$$

tenendo presente il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.

2) Ponendo $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, da cui $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ e $dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt$, l'integrale diventa

$$I:=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x+\sin^2 x}\,dx=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{t^2+1}{t(t+1)^2}\,dt.$$

Utilizziamo ora la formula di Hermite. Risulta

$$\frac{t^2+1}{t(t+1)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{(t+1)^2}$$

se e solo se

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B+C=0 \\ A=1 \end{cases}$$

da cui $A=1$, $B=0$ e $C=-2$. Pertanto

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{1}{t}\,dt-2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{1}{(t+1)^2}\,dt \\ &= [\log t]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}+\left[\frac{2}{t+1}\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}=\log(\sqrt{3})+1-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}. \end{aligned}$$

IV appello - 5 Giugno 2018

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{e^{2-x}}{x^2-1},$$

tracciandone un grafico approssimativo (non è richiesto lo studio della derivata seconda).

2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^4 \ln\left(\frac{2+x}{2}\right)\, dx.$$

Svolgimento

1) La funzione data è ben definita per ogni $x \neq \pm 1$, per cui il dominio è $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Osserviamo che la funzione f non presenta simmetrie. Per quanto riguarda la positività, si ha $f(x) > 0$ se e solo se $x^2 - 1 > 0$, ovvero se $x > 1$ oppure $x < -1$, mentre $f(x) < 0$ se $-1 < x < 1$. Essendo $f(x) \neq 0$, per ogni $x \in D(f)$, il grafico di f non interseca l'asse x, mentre interseca l'asse y nel punto $(0, -e^2)$.

Studiamo gli eventuali asintoti. Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2-x}}{x^2 - 1} = 0,$$

l'asse x è un asintoto orizzontale, per $x \to +\infty$; risulta invece

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2-x}}{x^2 - 1} = +\infty,$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2-x}}{x^3 - x} = -\infty,$$

da cui non ci sono asintoti orizzontali, né obliqui, per $x \to -\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{e^{2-x}}{x^2 - 1} = +\infty = \lim_{x\to-1^-} f(x),$$

mentre

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{e^{2-x}}{x^2 - 1} = -\infty = \lim_{x\to-1^+} f(x),$$

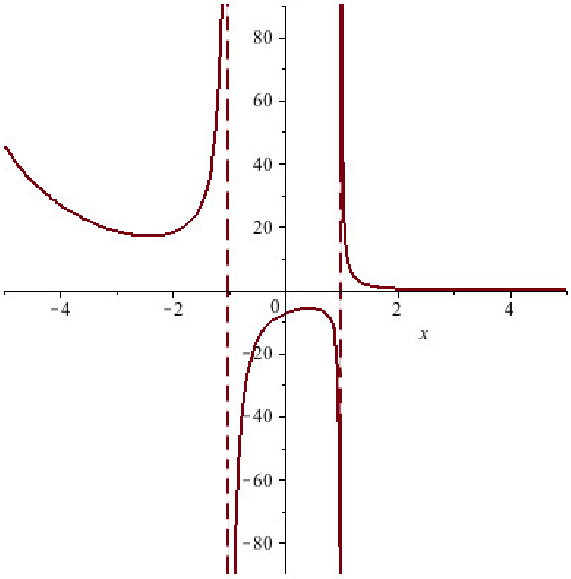
da cui le rette $x = -1$ e $x = 1$ sono asintoti verticali per f sia da destra che da sinistra.

La funzione $f(x)$ è continua e derivabile in $D(f)$ e risulta

$$f'(x) = \frac{e^{2-x}}{(x^2 - 1)^2}(1 - x^2 - 2x) :$$

essendo, per ogni $x \in D(f)$, $\frac{e^{2-x}}{(x^2-1)^2} > 0$, risulta $f'(x) > 0$ se e solo se $(1 - x^2 - 2x) > 0$, $x \in D(f)$: pertanto la funzione risulta decrescente in $(-\infty, -1 - \sqrt{2}]$, in $[-1 + \sqrt{2}, 1[$ e in $]1,+\infty)$, mentre è crescente in $[-1-\sqrt{2},-1[$ e in $]-1,-1+\sqrt{2}]$. Il punto $-1-\sqrt{2}$ è dunque di minimo relativo, mentre $-1+\sqrt{2}$ è di massimo relativo: ovviamente non ci sono punti di massimo, né di minimo assoluti in quanto la funzione non è limitata superiormente, né inferiormente.

Si può dunque tracciare il seguente grafico approssimativo:



2) Utilizzando il procedimento di integrazione per parti si ha

$$
\begin{aligned}
I &:= \int_0^4 \ln\left(\frac{2+x}{2}\right) dx = \int_0^4 \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) dx = \left[x\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\right]_0^4 - \int_0^4 \frac{x}{2+x}\,dx \\
&= 4\ln 3 - \int_0^4 \left(1-\frac{2}{2+x}\right) dx = 4\ln 3 - 4 + 2[\ln|2+x|]_0^4 \\
&= 4\ln 3 - 4 + 2\ln 6 - 2\ln 2 = 6\ln 3 - 4.
\end{aligned}
$$

V appello - 19 Giugno 2018

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare la continuità e la derivabilità della funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} e^{|x-2|}, & x \geq 0, \\ \cos(2x), & x < 0. \end{cases}$$

2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int x \arctan\left(1 - \frac{1}{x}\right) dx.$$

Svolgimento

1) Osserviamo che si può scrivere

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-2}, & x \geq 2, \\ e^{2-x}, & 0 \leq x < 2, \\ \cos(2x), & x < 0. \end{cases}$$

La funzione data è senz'altro continua per ogni $x \neq 0$, essendo composizione, somma e prodotto di funzioni continue. Nel punto $x = 0$ invece si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{2-x} = e^2 = f(0)$$

mentre

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \cos(2x) = 1,$$

da cui f non è continua in $x = 0$: pertanto la funzione è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Per quanto riguarda la derivabilità, la funzione è derivabile per ogni $x \neq 0, 2$, essendo composizione, somma e prodotto di funzioni derivabili. Non essendo continua, non è certamente derivabile nel punto $x = 0$, Nemmeno nel punto $x = 2$ è derivabile in quanto

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{e^{x-2} - 1}{x - 2} = 1,$$

mentre

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{x - 2} = -1.$$

Si ha infine

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x-2}, & x > 2, \\ \\ -e^{2-x}, & 0 < x < 2, \\ \\ -2\sin(2x), & x < 0. \end{cases}$$

2) Utilizzando il procedimento di integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned} I &:= \frac{x^2}{2}\arctan\left(1-\frac{1}{x}\right) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}\frac{1}{x^2}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan\left(1-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{2x^2-2x+1}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan\left(1-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{4}\int \left(1+\frac{2x-1}{2x^2-2x+1}\right)dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan\left(1-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\int \frac{4x-2}{2x^2-2x+1}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan\left(1-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\ln|2x^2-2x+1| + C, \end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$.

VI appello - 3 Luglio 2018

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare, utilizzando i limiti notevoli, il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\tan\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}+3}\right)}{(x+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)}$$

2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^{\sin x+1}\sin x\cos x\,dx.$$

Svolgimento

1) Osserviamo che, sebbene il calcolo diretto conduca ad una forma indeterminata, risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\tan\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}+3}\right)}{(x+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\tan\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}+3}\right)}{\dfrac{3}{\sqrt{x}+3}} \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}\frac{x+2}{x+1}\frac{\dfrac{1}{x+2}}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)} = 3,$$

tenendo presenti i limiti notevoli $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

2) Operando la sostituzione $t = \sin x + 1$, da cui $dt = \cos x\, dx$, e utilizzando poi il procedimento di integrazione per parti si ha

$$I := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^{\sin x+1}\sin x\cos x\, dx = \int_0^1 e^t(t-1)\, dt = [e^t(t-1)]_0^1 - \int_0^1 e^t\, dt = 2 - e.$$

VII appello - 4 Settembre 2018

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare, utilizzando i limiti notevoli, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x(x+1)\sin(4x)}.$$

2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\cos t(\sin^2 t + \sin t)}{\sin^2 t + 1}\, dt.$$

Svolgimento

1) Osserviamo che, sebbene il calcolo diretto conduca ad una forma indeterminata, risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x(x+1)\sin(4x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} \frac{1}{4(x+1)} \frac{4x}{\sin(4x)} = \frac{1}{4},$$

tenendo presenti i limiti notevoli $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$.

2) Operando la sostituzione $x = \sin t$, da cui $dx = \cos t\, dt$, si ha

$$\begin{aligned} I &:= \int \frac{\cos t(\sin^2 t + \sin t)}{\sin^2 t + 1}\, dt = \int \frac{x^2+x}{x^2+1}\, dx = \int \left(1 + \frac{x-1}{x^2+1}\right) dx \\ &= x + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1}\, dx - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = x + \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \arctan x + C, \end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$, da cui infine

$$I = \sin t + \frac{1}{2}\log(\sin^2 t + 1) - \arctan(\sin t) + C.$$

VIII appello - 13 Settembre 2018

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} 4x^2 \left(e^{\frac{2}{x^2}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+4}\,dx.$$

Svolgimento

1) Il calcolo diretto conduce ad una forma indeterminata. Osserviamo tuttavia che

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} 4x^2\left(e^{\frac{2}{x^2}}-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) &= \lim_{x\to+\infty} 4x^2\left(e^{\frac{2}{x^2}}-1+1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= 4\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{e^{\frac{2}{x^2}}-1}{\frac{2}{x^2}}+\frac{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}\right)=10,\end{aligned}$$

tenendo presente i limiti notevoli $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

2) Ponendo $t=e^x$, da cui $dt=e^x\,dx$, l'integrale diventa

$$\begin{aligned}I &:= \int\frac{e^{3x}}{e^{2x}+4}\,dx=\int\frac{t^2}{t^2+4}\,dt=\int\left(1-\frac{4}{t^2+4}\right)\,dt.\\ &= t-\int\frac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\,dt=t-2\arctan\left(\frac{t}{2}\right)+C,\end{aligned}$$

da cui infine

$$I=e^x-2\arctan\left(\frac{e^x}{2}\right)+C,$$

con $C\in\mathbb{R}$.