I Teorema delle Restrizioni. *Sia $A \subset I\!R$ un insieme non vuoto, $x_o \in A'$ e sia $f : A \to I\!R$ tale che $\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell \in \widetilde{I\!R}$. Sia inoltre $B \subset A$ tale che $x_o \in B'$. Allora, posto $g = f_{|B}$ risulta necessariamente $\lim_{x \to x_o} g(x) = \ell$.*

Dimostrazione. Supponiamo per fissare le idee che $\ell \in I\!R$. Per ipotesi sappiamo che:

(1) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\rho(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $x \in A$ con $0 < |x - x_o| < \rho(\varepsilon)$ risulta $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

Ciò che vogliamo provare è che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $r(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $x \in B$ con $0 < |x - x_o| < r(\varepsilon)$ risulta $|g(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

Poichè g è una restrizione di f, per $x \in B$ si ha $g(x) = f(x)$.

Basta allora prendere $r(\varepsilon) = \rho(\varepsilon)$: infatti se $x \in B$ e $0 < |x - x_o| < r(\varepsilon) = \rho(\varepsilon)$ sappiamo che x appartiene anche ad A e quindi per la (1), in tali x risulta

$$|g(x) - \ell| = |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Osservazione: Il I Teorema delle Restrizioni consente di provare in molti casi la non esistenza del limite; basta infatti determinare due distinte restrizioni di una funzione, aventi un medesimo punto di accumuazione, tali da ammettere limiti diversi in questo punto. Allora necessariamente il limite non esiste (perchè se esistesse avremmo una contraddizione col I Teorema delle Restrizioni).

Ad esempio, se consideriamo la successione $(-1)^n, n \in I\!N$, il I Teorema delle Restrizioni (nella formulazione relativa al limite per $x \to +\infty$ che invitiamo il lettore a scrivere esplicitamente) prova che essa non può ammettere limite (come si dice è *irregolare*). Infatti risulta evidentemente

$$\lim_{n \to +\infty} a_{2n} = 1, \quad \lim_{n \to +\infty} a_{2n+1} = -1$$

in quanto le due sottosuccessioni sono costanti. Se la successione globale ammettesse limite, per il I Teorema delle Restrizioni tutte le sottosuccessioni dovrebbero avere lo stesso limite, mentre noi ne abbiamo individuate due che convergono a due limiti diversi.

II Teorema delle Restrizioni. *Sia $A \subset I\!R$ un insieme non vuoto, $x_o \in A'$ e siano B_1, B_2 due sottoinsiemi di A tali che $x_o \in B_1' \cap B_2'$ e $B_1 \cup B_2 = A$. Sia $f : A \to I\!R$ tale che, posto $g_1 = f_{|B_1}, g_2 = f_{|B_2}$, risulti*

$$\lim_{x \to x_o} g_1(x) = \lim_{x \to x_o} g_2(x) = \ell \in \widetilde{I\!R}. \tag{1}$$

Allora anche

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell. \tag{2}$$

Dimostrazione. Supponiamo per fissare le idee che $\ell = +\infty$.

Dalla (1) sappiamo che per ogni $K \in I\!R$ esistono $r_1(K) > 0$ e $r_2(K) > 0$ tali che se $x \in A$ è tale che

$$0 < |x - x_o| < \begin{array}{l} r_1(K), x \in B_1 \Longrightarrow g_1(x) > K \\ \\ r_2(K), x \in B_2 \Longrightarrow g_2(x) > K. \end{array}$$

Vogliamo d'altronde provare che $\lim_{x \to x_o} f(x) = +\infty$, cioè che per ogni $K > 0$ esiste $r(K) > 0$ tale che se $x \in A$ con $0 < |x - x_o| < r(K)$ allora $f(x) > K$.

Scegliamo $r(K) = \min\{r_1(K), r_2(K)\}$.

In questo modo $r(K) > 0$ e $I(x_o, r(K)) \subset I(x_o, r_1(K)) \cap I(x_o, r_2(K))$. D'altra parte, se $x \in A$ si ha che $x \in B_1$ oppure $x \in B_2$.

Allora per ogni $x \in A$ con $0 < |x - x_o| < r(k)$ si verifica necessariamente almeno una delle condizioni $x \in I(x_o, r_1(K)) \cap B_1 \setminus \{x_o\}$ oppure $x \in I(x_o, r_2(K)) \cap B_2 \setminus \{x_o\}$; se si verifica la prima, allora $f(x) = g_1(x) > K$ mentre se si verifica la seconda allora $f(x) = g_2(x) > K$, dunque in conclusione per $x \in A$ con $0 < |x - x_o| < r(K)$ si verifica sempre che $f(x) > K$.