“Proprietà spettrali di matrici α-circolanti e di successioni di matrici α-Toeplitz”

Debora Sesana
in collaborazione con: Stefano Serra-Capizzano e Eric Ngondiep
Dipartimento di Fisica e Matematica
Università dell’Insubria - Como

Sommario

Sommario

- definizione di matrice α-circolante;

Sommario

- definizione di matrice α-circolante;
    - calcolo diretto dei valori singolari;

Sommario

- definizione di matrice α-circolante;
  - calcolo diretto dei valori singolari;
  - algoritmo ricorsivo per il calcolo degli autovalori;

Sommario

- definizione di matrice α-circolante;
  - calcolo diretto dei valori singolari;
  - algoritmo ricorsivo per il calcolo degli autovalori;
- definizione di matrice α-Toeplitz;

Sommario

- definizione di matrice α-circolante;
  - calcolo diretto dei valori singolari;
  - algoritmo ricorsivo per il calcolo degli autovalori;
- definizione di matrice α-Toeplitz;
  - distribuzione nel senso dei valori singolari.

Sommario

- definizione di matrice α-circolante;
  - calcolo diretto dei valori singolari;
  - algoritmo ricorsivo per il calcolo degli autovalori;
- definizione di matrice α-Toeplitz;
  - distribuzione nel senso dei valori singolari.

Matrici Circolanti

Una matrice circolante C_n è definita in questo modo:

$$
\begin{aligned}
C_n &= \left[a_{(j-k)\,\mathrm{mod}\,n}\right]_{j,k=0}^{n-1} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \ddots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}}_{caratterizzazione\,algebrica} = \underbrace{F_n D_n F_n^*}_{caratterizzazione\,spettrale}
\end{aligned}
$$

dove

$$
\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left[e^{-\frac{2\pi ijk}{n}}\right]_{j,k=0}^{n-1}, \text{ matrice di Fourier,} \\
D_n &= diag(\sqrt{n}F_n^*\underline{c}), \\
\underline{c} &= [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]^T, \text{ prima colonna della matrice } C_n,
\end{aligned}
$$

Matrici α-circolanti

Una matrice α-circolante C_n è definita in questo modo:

$$
\begin{aligned}
C_{n,\alpha} &= [a_{(j-\alpha k) \bmod n}]_{j,k=0}^{n-1} \qquad 0 \leq \alpha < n \\
&= \begin{pmatrix}
a_0 & a_{(-\alpha) \bmod n} & \cdots & a_{(-(n-1)\alpha) \bmod n} \\
a_1 & a_{(1-\alpha) \bmod n} & \cdots & a_{(1-(n-1)\alpha) \bmod n} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n-1} & a_{(n-\alpha) \bmod n} & \cdots & a_{(n-1-(n-1)\alpha) \bmod n}
\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

Esempi di matrici α-circolanti

Se $n = 5$ e $\alpha = 3$ abbiamo

$$C_{n,\alpha} = \begin{pmatrix} a_0 & a_2 & a_4 & a_1 & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_0 & a_2 & a_4 \\ a_2 & a_4 & a_1 & a_3 & a_0 \\ a_3 & a_0 & a_2 & a_4 & a_1 \\ a_4 & a_1 & a_3 & a_0 & a_2 \end{pmatrix}$$

Esempi di matrici α-circolanti

Se $n = 5$ e $\alpha = 3$ abbiamo

$$C_{n,\alpha} = \begin{pmatrix} a_0 & a_2 & a_4 & a_1 & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_0 & a_2 & a_4 \\ a_2 & a_4 & a_1 & a_3 & a_0 \\ a_3 & a_0 & a_2 & a_4 & a_1 \\ a_4 & a_1 & a_3 & a_0 & a_2 \end{pmatrix} \qquad (n,\alpha) = gcd(n,\alpha) = 1.$$

Se $n = 6$ e $\alpha = 3$ abbiamo

$$C_{n,\alpha} \quad = \quad \begin{pmatrix} a_0 & a_3 & a_0 & a_3 & a_0 & a_3 \\ a_1 & a_4 & a_1 & a_4 & a_1 & a_4 \\ a_2 & a_5 & a_2 & a_5 & a_2 & a_5 \\ a_3 & a_0 & a_3 & a_0 & a_3 & a_0 \\ a_4 & a_1 & a_4 & a_1 & a_4 & a_1 \\ a_5 & a_2 & a_5 & a_2 & a_5 & a_2 \end{pmatrix} \qquad (n,\alpha) = gcd(n,\alpha) \neq 1.$$

Matrici α-circolanti

Una matrice α-circolante C_n è definita in questo modo:

$$
\begin{aligned}
C_{n,\alpha} &= \left[a_{(j-\alpha k) \bmod n}\right]_{j,k=0}^{n-1} \qquad 0 \le \alpha < n \\
&= \begin{pmatrix}
a_0 & a_{(-\alpha) \bmod n} & \cdots & a_{(-(n-1)\alpha) \bmod n} \\
a_1 & a_{(1-\alpha) \bmod n} & \cdots & a_{(1-(n-1)\alpha) \bmod n} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n-1} & a_{(n-\alpha) \bmod n} & \cdots & a_{(n-1-(n-1)\alpha) \bmod n}
\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

Matrici α-circolanti

Una matrice α-circolante C_n è definita in questo modo:

$$C_{n,\alpha} = [a_{(j-\alpha k) \bmod n}]_{j,k=0}^{n-1} \qquad 0 \le \alpha < n$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 & a_{(-\alpha) \bmod n} & \cdots & a_{(-(n-1)\alpha) \bmod n} \\ a_1 & a_{(1-\alpha) \bmod n} & \cdots & a_{(1-(n-1)\alpha) \bmod n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{(n-\alpha) \bmod n} & \cdots & a_{(n-1-(n-1)\alpha) \bmod n} \end{pmatrix},$$

e può essere scritta come

$$C_{n,\alpha} = C_n Z_{n,\alpha} = F_n D_n F_n^* Z_{n,\alpha},$$

con

$$Z_{n,\alpha} = [\delta_{r-\alpha c}]_{r,c=0}^{n-1}, \qquad \delta_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k \equiv_{\bmod n} 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esempi di matrici α-circolanti

Se $n = 5$ e $\alpha = 3$ abbiamo

$$C_{n,\alpha} = \begin{pmatrix} a_0 & a_2 & a_4 & a_1 & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_0 & a_2 & a_4 \\ a_2 & a_4 & a_1 & a_3 & a_0 \\ a_3 & a_0 & a_2 & a_4 & a_1 \\ a_4 & a_1 & a_3 & a_0 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_4 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempi di matrici α-circolanti

Se $n = 6$ e $\alpha = 3$ abbiamo

$$C_{n,\alpha} = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 & a_0 & a_3 & a_0 & a_3 \\ a_1 & a_4 & a_1 & a_4 & a_1 & a_4 \\ a_2 & a_5 & a_2 & a_5 & a_2 & a_5 \\ a_3 & a_0 & a_3 & a_0 & a_3 & a_0 \\ a_4 & a_1 & a_4 & a_1 & a_4 & a_1 \\ a_5 & a_2 & a_5 & a_2 & a_5 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_5 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_5 & a_4 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_5 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sommario

- definizione di matrice α-circolante;
  - calcolo diretto dei valori singolari;
  - algoritmo ricorsivo per il calcolo degli autovalori;
- definizione di matrice α-Toeplitz;
  - distribuzione nel senso dei valori singolari.

Sommario

- definizione di matrice α-circolante;
  - calcolo diretto dei valori singolari;
  - algoritmo ricorsivo per il calcolo degli autovalori;
- definizione di matrice α-Toeplitz;
  - distribuzione nel senso dei valori singolari.

Strumenti principali (1)

Data una matrice A vale che

$$\begin{aligned}
\sigma_j(A) &= \sqrt{\lambda_j(A^*A)}, \quad j = 0, \ldots, n-1, \\
& \Downarrow \\
\sigma_j(C_{n,\alpha}) &= \sqrt{\lambda_j(C_{n,\alpha}^* C_{n,\alpha})}, \quad j = 0, \ldots, n-1,
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
C_{n,\alpha}^* C_{n,\alpha} &= (F_n D_n F_n^* Z_{n,\alpha})^* (F_n D_n F_n^* Z_{n,\alpha}) \\
&= Z_{n,\alpha}^* F_n D_n^* F_n^* F_n D_n F_n^* Z_{n,\alpha} \\
&= Z_{n,\alpha}^* F_n D_n^* D_n F_n^* Z_{n,\alpha} \\
&= (F_n^* Z_{n,\alpha})^* D_n^* D_n F_n^* Z_{n,\alpha}
\end{aligned}$$

Strumenti principali (1)

Data una matrice A vale che

$$\sigma_j(A) = \sqrt{\lambda_j(A^*A)}, \quad j = 0, \ldots, n-1,$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_j(C_{n,\alpha}) = \sqrt{\lambda_j(C_{n,\alpha}^* C_{n,\alpha})}, \quad j = 0, \ldots, n-1,$$

dove

$$\begin{aligned} C_{n,\alpha}^* C_{n,\alpha} &= (F_n D_n F_n^* Z_{n,\alpha})^* (F_n D_n F_n^* Z_{n,\alpha}) \\ &= Z_{n,\alpha}^* F_n D_n^* F_n^* F_n D_n F_n^* Z_{n,\alpha} \\ &= Z_{n,\alpha}^* F_n D_n^* D_n F_n^* Z_{n,\alpha} \\ &= (F_n^* Z_{n,\alpha})^* D_n^* D_n F_n^* Z_{n,\alpha}. \end{aligned}$$

Strumenti principali (2)

La matrice $Z_{n,\alpha}$ può essere scritta come

$$Z_{n,\alpha} \quad = \quad \underbrace{\left[\widetilde{Z}_{n,\alpha}|\widetilde{Z}_{n,\alpha}|\cdots|\widetilde{Z}_{n,\alpha}\right]}_{(n,\alpha)\text{ volte}}$$

dove $\widetilde{Z}_{n,\alpha} \in \mathbb{C}^{n\times n_\alpha}$, $n_\alpha = \frac{n}{(n,\alpha)}$, è la matrice $Z_{n,\alpha}$ della quale vengono prese in considerazione solo le prime n_α colonne.

Strumenti principali (2)

La matrice $Z_{n,\alpha}$ può essere scritta come

$$Z_{n,\alpha} = \underbrace{\left[\widetilde{Z}_{n,\alpha}|\widetilde{Z}_{n,\alpha}|\cdots|\widetilde{Z}_{n,\alpha}\right]}_{(n,\alpha)\text{ volte}}$$

dove $\widetilde{Z}_{n,\alpha} \in \mathbb{C}^{n\times n_\alpha}$, $n_\alpha = \frac{n}{(n,\alpha)}$, è la matrice $Z_{n,\alpha}$ della quale vengono prese in considerazione solo le prime n_α colonne.

Quindi

$$F_n^* Z_{n,\alpha} = \underbrace{\left[F_n^*\widetilde{Z}_{n,\alpha}|F_n^*\widetilde{Z}_{n,\alpha}|\cdots|F_n^*\widetilde{Z}_{n,\alpha}\right]}_{(n,\alpha)\text{ volte}}$$

Strumenti principali (2)

La matrice $Z_{n,\alpha}$ può essere scritta come

$$Z_{n,\alpha} \quad = \quad \underbrace{\left[\widetilde{Z}_{n,\alpha} | \widetilde{Z}_{n,\alpha} | \cdots | \widetilde{Z}_{n,\alpha} \right]}_{(n,\alpha) \text{ volte}}$$

dove $\widetilde{Z}_{n,\alpha} \in \mathbb{C}^{n \times n_\alpha}$, $n_\alpha = \frac{n}{(n,\alpha)}$, è la matrice $Z_{n,\alpha}$ della quale vengono prese in considerazione solo le prime n_α colonne.

Quindi

$$F_n^* Z_{n,\alpha} = \underbrace{\left[F_n^* \widetilde{Z}_{n,\alpha} | F_n^* \widetilde{Z}_{n,\alpha} | \cdots | F_n^* \widetilde{Z}_{n,\alpha} \right]}_{(n,\alpha) \text{ volte}}$$

Strumenti principali (3)

La matrice $F_n^* \widetilde{Z}_{n,\alpha}$ può essere scritta come

$$F_n^* \widetilde{Z}_{n,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{(n,\alpha)}} I_{n,(n,\alpha)} F_{n_\alpha}^* Z_{n_\alpha,\pi_\alpha},$$

dove $n_\alpha = \frac{n}{(n,\alpha)}$, $\pi_\alpha = \frac{\alpha}{(n,\alpha)} \Rightarrow (n_\alpha, \pi_\alpha) = 1$

$$I_{n,(n,\alpha)} = \left.\begin{bmatrix} I_{n_\alpha} \\ \hline I_{n_\alpha} \\ \hline \vdots \\ \hline I_{n_\alpha} \end{bmatrix}\right\} (n,\alpha) \text{ volte, con } I_{n_\alpha} \in \mathbb{C}^{n_\alpha \times n_\alpha} \text{ matrice identità.}$$

Strumenti principali (3)

La matrice $F_n^* \widetilde{Z}_{n,\alpha}$ può essere scritta come

$$F_n^* \widetilde{Z}_{n,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{(n,\alpha)}} I_{n,(n,\alpha)} F_{n_\alpha}^* Z_{n_\alpha,\pi_\alpha},$$

Quindi otteniamo

$$\begin{aligned}
F_n^* Z_{n,\alpha} &= \underbrace{\left[F_n^* \widetilde{Z}_{n,\alpha} | F_n^* \widetilde{Z}_{n,\alpha} | \cdots | F_n^* \widetilde{Z}_{n,\alpha}\right]}_{(n,\alpha) \text{ volte}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(n,\alpha)}} \underbrace{\left[I_{n,(n,\alpha)} F_{n_\alpha}^* Z_{n_\alpha,\pi_\alpha} | \cdots | I_{n,(n,\alpha)} F_{n_\alpha}^* Z_{n_\alpha,\pi_\alpha}\right]}_{(n,\alpha) \text{ volte}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(n,\alpha)}} \underbrace{\left[I_{n,(n,\alpha)} | I_{n,(n,\alpha)} | \cdots | I_{n,(n,\alpha)}\right]}_{(n,\alpha) \text{ volte}} \left(I_{(n,\alpha)} \otimes F_{n_\alpha}^* Z_{n_\alpha,\pi_\alpha}\right)
\end{aligned}$$

Strumenti principali (3)

$$F_n^* Z_{n,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{(n,\alpha)}} \underbrace{\left[I_{n,(n,\alpha)} | I_{n,(n,\alpha)} | \cdots | I_{n,(n,\alpha)}\right]}_{(n,\alpha) \text{ volte}} (I_{(n,\alpha)} \otimes F_{n_\alpha}^* Z_{n_\alpha,\pi_\alpha})$$

Quindi, poiché $I_{(n,\alpha)} \otimes F_{n_\alpha}^* Z_{n_\alpha,\pi_\alpha}$ è una matrice unitaria, abbiamo che

$$\begin{aligned} C_{n,\alpha}^* C_{n,\alpha} &= (F_n^* Z_{n,\alpha})^* D_n^* D_n F_n^* Z_{n,\alpha} \\ &\Downarrow \\ Eig(C_{n,\alpha}^* C_{n,\alpha}) &= \frac{1}{(n,\alpha)} Eig\left(J_{n,\alpha}^T D_n^* D_n J_{n,\alpha}\right) \end{aligned}$$

dove $J_{n,\alpha} = \left[I_{n,(n,\alpha)} | \cdots | I_{n,(n,\alpha)}\right]$.

Valori singolari

I valori singolari di $C_{n,\alpha} = F_n D_n F_n^* Z_{n,\alpha}$ con $D_n = diag_{j=0}^{n-1}(d_j)$, sono dati da

$$\begin{aligned}
\sigma_j(C_{n,\alpha}) &= \sqrt{\sum_{l=1}^{(n,\alpha)} |d_{(l-1)n_\alpha+j}|^2}, \quad j = 0, 1, \ldots, n_\alpha - 1, \\
\sigma_j(C_{n,\alpha}) &= 0, \qquad j = n_\alpha, \ldots, n-1,
\end{aligned}$$

Valori singolari

I valori singolari di $C_{n,\alpha} = F_n D_n F_n^* Z_{n,\alpha}$ con $D_n = diag_{j=0}^{n-1}(d_j)$, sono dati da

$$
\begin{aligned}
\sigma_j(C_{n,\alpha}) &= \sqrt{\sum_{l=1}^{(n,\alpha)} |d_{(l-1)n_\alpha+j}|^2}, \quad j = 0, 1, \ldots, n_\alpha - 1, \\
\sigma_j(C_{n,\alpha}) &= 0, \qquad j = n_\alpha, \ldots, n-1,
\end{aligned}
$$

- nel caso in cui $(n, \alpha) = 1$, abbiamo

$$
\sigma_j(C_{n,\alpha}) = \sqrt{|d_j|^2} = |d_j|, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.
$$

Sommario

- definizione di matrice α-circolante;
  - calcolo diretto dei valori singolari;
  - algoritmo ricorsivo per il calcolo degli autovalori;
- definizione di matrice α-Toeplitz;
  - distribuzione nel senso dei valori singolari.

Sommario

- definizione di matrice α-circolante;
  - calcolo diretto dei valori singolari;
  - algoritmo ricorsivo per il calcolo degli autovalori;
- definizione di matrice α-Toeplitz;
  - distribuzione nel senso dei valori singolari.

Teorema

Idea: ridurre il calcolo degli autovalori di una α-circolante di dimensione n al calcolo degli autovalori di una matrice più piccola che abbia, possibilmente, una qualche struttura:

Teorema 1 *Supponiamo di avere una matrice A di dimensione $n \times n$, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, che puo' essere scritta come $A = XY^*$, dove $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times k}$, con $k \leq n$. Allora gli n autovalori della matrice A sono dati dai k autovalori della matrice $Y^*X \in \mathbb{C}^{k\times k}$ piu' $n-k$ autovalori nulli:*

$$Eig(A) = Eig(Y^*X) \cup \{0 \text{ con molteplicita' geometrica } n-k\}.$$

Osservazione 1

$$\begin{aligned} C_{n,\alpha} &= C_n Z_{n,\alpha} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n_\alpha = \frac{n}{(n,\alpha)} \\ &= C_n \underbrace{\left[\widetilde{Z}_{n,\alpha}|\widetilde{Z}_{n,\alpha}|\cdots|\widetilde{Z}_{n,\alpha}\right]}_{(n,\alpha)\text{ volte}} \\ &= C_n \widetilde{Z}_{n,\alpha} \underbrace{\left[I_{n_\alpha}|I_{n_\alpha}|\cdots|I_{n_\alpha}\right]}_{(n,\alpha)\text{ volte}} \\ &= \widetilde{C}_{n,\alpha} I_{n,n_\alpha} \qquad\qquad \widetilde{C}_{n,\alpha} \in \mathbb{C}^{n\times n_\alpha},\ I_{n,n_\alpha} \in \mathbb{C}^{n_\alpha \times n} \end{aligned}$$

$\Downarrow$ per il Teorema 1

$$Eig(C_{n,\alpha}) = Eig(I_{n,n_\alpha}\widetilde{C}_{n,\alpha}) \cup \{0 \text{ con molteplicita' geometrica } n - n_\alpha\}.$$

Osservazione 2

La matrice $I_{n,n_\alpha}\widetilde{C}_{n,\alpha} = \widehat{C}_{n_\alpha,\widehat{\alpha}}$ è una matrice $\widehat{\alpha}$-circolante di dimensione $n_\alpha = \frac{n}{(n,\alpha)}$, con $\widehat{\alpha} = \alpha \bmod n_\alpha$, i cui elementi sono dati da

$$(\widehat{C}_{n,\widehat{\alpha}})_{j,k} = \sum_{t=0}^{(n,\alpha)-1} a_{(j+tn_\alpha-\alpha k) \bmod n}, \qquad j,k = 0,\ldots,n_\alpha - 1,$$

dove gli a_j sono gli elementi della prima colonna di $C_{n,\alpha}$.

Quindi il calcolo degli autovalori di una matrice α-circolante può essere ridotto al calcolo degli autovalori di una matrice $\widehat{\alpha}$-circolante di dimensioni più piccole.

$$\Downarrow$$

procedura ricorsiva

Caso particolare (1)

Se $\alpha = 0$ abbiamo che, per $j, k = 0, \ldots, n-1$,

$$(C_{n,\alpha})_{j,k} = (C_{n,0})_{j,k} = a_{(j-0\cdot k) \bmod n} = a_j.$$

Questo significa che $C_{n,0}$ è una matrice che ha elementi costanti lungo tutte le righe e, perciò, ha rango 1; quindi, ricordando che la traccia di una matrice è la somma dei suoi autovalori, possiamo concludere che $C_{n,0}$ ha $n-1$ autovalori nulli e un autovalore λ diverso da zero, dato da

$$\lambda = tr(C_{n,0}) = \sum_{j=0}^{n-1} (C_{n,0})_{j,j} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j.$$

Caso particolare (2)

Se $\alpha = 1$, allora $C_{n,\alpha} = C_{n,1} = C_n$ è la classica matrice circolante, e gli autovalori sono dati da

$$\lambda_j = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi ijk}{n}} a_k \qquad j = 0, \ldots, n-1.$$

dove gli a_k sono gli elementi della prima colonna di C_n.

Caso particolare (2)

Se $\alpha = 1$, allora $C_{n,\alpha} = C_{n,1} = C_n$ è la classica matrice circolante, e gli autovalori sono dati da

$$\lambda_j = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi ijk}{n}} a_k \qquad j = 0, \dots, n-1.$$

dove gli a_k sono gli elementi della prima colonna di C_n.

Quindi se $C_{n,\alpha}$ è una matrice α-circolante la cui prima colonna è formata dagli elementi a_k, $k = 0, \dots, n-1$, gli autovalori possono essere calcolati mediante il seguente algoritmo ricorsivo:

Algoritmo ricorsivo

I passo: se $\alpha = 0$, $C_{n,\alpha}$ ha $n-1$ autovalori nulli e un autovalore $\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$ [stop];

Algoritmo ricorsivo

I passo: se $\alpha = 0$, $\ldots\ldots$[stop];

II passo: se $\alpha = 1$, gli autovalori di $C_{n,\alpha}$ sono

$$\lambda_j = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi ijk}{n}} a_k \qquad j = 0, \ldots, n-1. \qquad \text{[stop]}$$

Algoritmo ricorsivo

I passo: se $\alpha = 0$, $\ldots\ldots$.[stop];

II passo: se $\alpha = 1$,$\ldots\ldots$.[stop];

III passo: se $(n, \alpha) = 1$ con $\alpha \neq 1$, calcolo gli autovalori.......[stop]

Algoritmo ricorsivo

I passo: se $\alpha = 0$, $\ldots\ldots$[stop];

II passo: se $\alpha = 1$,$\ldots\ldots$[stop];

III passo: se $(n, \alpha) = 1$ con $\alpha \neq 1$, calcolo gli autovalori.......[stop]

IV passo: se $\alpha \notin \{0, 1\}$ e $(n, \alpha) \neq 1$, $C_{n,\alpha}$ ha $n - n_\alpha$ autovalori uguali a zero ($n_\alpha = \frac{n}{(n,\alpha)}$) e i restanti n_α sono gli autovalori della $\widehat{\alpha}$-circolante $\widehat{C}_{n_\alpha,\widehat{\alpha}}$; quindi poniamo

$$
\begin{aligned}
a_k &= \sum_{t=0}^{(n,\alpha)-1} a_{(k+tn_\alpha) \bmod n}, \quad k = 0, \ldots n_\alpha - 1 \\
\alpha &= \widehat{\alpha} = \alpha \bmod n_\alpha, \\
n &= n_\alpha = \frac{n}{(n, \alpha)},
\end{aligned}
$$

e ripartiamo dal I passo.

Autovalori nel caso $(n, \alpha) = 1$

Osservazione 1: se $C_{n,\alpha}$ è una α-circolante e $C_{n,\beta}$ è una β-circolante, allora $C_{n,\alpha}C_{n,\beta}$ è una $\alpha\beta$-circolante.

Autovalori nel caso $(n, \alpha) = 1$

Osservazione 1: se $C_{n,\alpha}$ è una α-circolante e $C_{n,\beta}$ è una β-circolante, allora $C_{n,\alpha}C_{n,\beta}$ è una $\alpha\beta$-circolante.

Osservazione 2: data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ per ogni k intero positivo vale che $\lambda_j(A^k) = \lambda_j^k(A)$.

Autovalori nel caso $(n, \alpha) = 1$

Osservazione 1: se $C_{n,\alpha}$ è una α-circolante e $C_{n,\beta}$ è una β-circolante, allora $C_{n,\alpha}C_{n,\beta}$ è una $\alpha\beta$-circolante.

Osservazione 2: data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ per ogni k intero positivo vale che $\lambda_j(A^k) = \lambda_j^k(A)$.

$$\Downarrow$$

trovato un numero q tale che $\alpha^q \equiv_{\text{mod } n} 1$, abbiamo che $C_{n,\alpha}^q$ è una circolante, quindi

$$\lambda_j(C_{n,\alpha}) = \lambda_j^{\frac{1}{q}}(C_{n,\alpha}^q).$$

Autovalori nel caso $(n, \alpha) = 1$

Poiché per calcolare gli autovalori di una matrice circolante necessitiamo solo degli elementi della prima colonna, se chiamiamo e_1 il primo vettore della base canonica abbiamo

$$\begin{aligned} C_{n,\alpha}^q e_1 &= C_{n,\alpha} \cdots C_{n,\alpha} C_{n,\alpha} e_1 \\ &= F_n D_n F_n^* Z_{n,\alpha} \cdots F_n D_n F_n^* Z_{n,\alpha} F_n D_n F_n^* Z_{n,\alpha} e_1 \end{aligned}$$

Autovalori nel caso $(n, \alpha) = 1$

Poiché per calcolare gli autovalori di una matrice circolante necessitiamo solo degli elementi della prima colonna, se chiamiamo e_1 il primo vettore della base canonica abbiamo

$$\begin{aligned} C_{n,\alpha}^q e_1 &= C_{n,\alpha} \cdots C_{n,\alpha} C_{n,\alpha} e_1 \\ &= F_n D_n F_n^* Z_{n,\alpha} \cdots F_n D_n F_n^* Z_{n,\alpha} F_n D_n F_n^* \quad \underbrace{Z_{n,\alpha} e_1}_{permutazione} \end{aligned}$$

Autovalori nel caso $(n, \alpha) = 1$

Poiché per calcolare gli autovalori di una matrice circolante necessitiamo solo degli elementi della prima colonna, se chiamiamo e_1 il primo vettore della base canonica abbiamo

$$\begin{aligned} C^q_{n,\alpha} e_1 &= C_{n,\alpha} \cdots C_{n,\alpha} C_{n,\alpha} e_1 \\ &= F_n D_n F_n^* Z_{n,\alpha} \cdots F_n D_n F_n^* Z_{n,\alpha} F_n D_n \underbrace{F_n^* \underbrace{Z_{n,\alpha} e_1}_{permutazione}}_{FFT} \end{aligned}$$

Autovalori nel caso $(n, \alpha) = 1$

Poiché per calcolare gli autovalori di una matrice circolante necessitiamo solo degli elementi della prima colonna, se chiamiamo e_1 il primo vettore della base canonica abbiamo

$$\begin{aligned} C_{n,\alpha}^{q} e_1 &= C_{n,\alpha} \cdots C_{n,\alpha} C_{n,\alpha} e_1 \\ &= F_n D_n F_n^* Z_{n,\alpha} \cdots F_n D_n F_n^* Z_{n,\alpha} F_n \underbrace{D_n \underbrace{F_n^* \underbrace{Z_{n,\alpha} e_1}_{permutazione}}_{FFT}}_{n\ moltiplicazioni} \end{aligned}$$

Autovalori nel caso $(n,\alpha)=1$

Poiché per calcolare gli autovalori di una matrice circolante necessitiamo solo degli elementi della prima colonna, se chiamiamo e_1 il primo vettore della base canonica abbiamo

$$\begin{aligned}
C_{n,\alpha}^{q} e_1 &= C_{n,\alpha} \cdots C_{n,\alpha} C_{n,\alpha} e_1 \\
&= F_n D_n F_n^* Z_{n,\alpha} \cdots F_n D_n F_n^* Z_{n,\alpha} \underbrace{F_n \underbrace{D_n \underbrace{F_n^* \underbrace{Z_{n,\alpha} e_1}_{permutazione}}_{FFT}}_{n\ moltiplicazioni}}_{FFT}
\end{aligned}$$

Autovalori nel caso $(n, \alpha) = 1$

Poiché per calcolare gli autovalori di una matrice circolante necessitiamo solo degli elementi della prima colonna, se chiamiamo e_1 il primo vettore della base canonica abbiamo

$$\begin{aligned} C_{n,\alpha}^{q} e_1 &= C_{n,\alpha} \cdots C_{n,\alpha} C_{n,\alpha} e_1 \\ &= F_n D_n F_n^* Z_{n,\alpha} \cdots F_n D_n F_n^* Z_{n,\alpha} \underbrace{F_n \underbrace{D_n \underbrace{F_n^* \underbrace{Z_{n,\alpha} e_1}_{permutazione}}_{FFT}}_{n\ moltiplicazioni}}_{FFT} \end{aligned}$$

Espressione esplicita per gli elementi della matrice $C_{n,\alpha}^{q}$?

Caso particolare: $n = \alpha^k$

Se $n = \alpha^k$, e partiamo con l'algoritmo ricorsivo, otteniamo

$$\begin{aligned} n_\alpha &= \frac{n}{(n,\alpha)} = \alpha^{k-1}; \\ \alpha &= \alpha; \\ n &= \alpha^k; \end{aligned}$$

I passo: se $\alpha = 0$, ...[stop];

II passo: se $\alpha = 1$, ...[stop];

III passo: se $(n,\alpha) = 1$ con $\alpha \neq 1$, ...[stop];

IV passo: se $\alpha \notin \{0,1\}$ e $(n,\alpha) \neq 1$,

$(n - n_\alpha)$ autovalori uguali a zero,

$$\begin{aligned} \alpha &= \widehat{\alpha} = \alpha \bmod n_\alpha, \\ n &= n_\alpha = \frac{n}{(n,\alpha)}, \end{aligned}$$

Caso particolare: $n = \alpha^k$

Se $n = \alpha^k$, e partiamo con l'algoritmo ricorsivo, otteniamo

$$
\begin{aligned}
n_\alpha &= \frac{n}{(n,\alpha)} = \alpha^{k-1}; \\
\alpha &= \alpha; \\
n &= \alpha^{k-1};
\end{aligned}
$$

I passo: se $\alpha = 0$, ...[stop];

II passo: se $\alpha = 1$, ...[stop];

III passo: se $(n,\alpha) = 1$ con $\alpha \neq 1$, ...[stop];

IV passo: se $\alpha \notin \{0,1\}$ e $(n,\alpha) \neq 1$,

$(n - n_\alpha)$ autovalori uguali a zero,

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \widehat{\alpha} = \alpha \bmod n_\alpha, \\
n &= n_\alpha = \frac{n}{(n,\alpha)},
\end{aligned}
$$

Caso particolare: $n = \alpha^k$

Se $n = \alpha^k$, e partiamo con l'algoritmo ricorsivo, otteniamo

$$\begin{aligned} n_\alpha &= \frac{n}{(n,\alpha)} = \alpha^{k-2}; \\ \alpha &= \alpha; \\ n &= \alpha^{k-2}; \end{aligned}$$

I passo: se $\alpha = 0$, $\ldots\ldots$[stop];

II passo: se $\alpha = 1$, $\ldots\ldots$[stop];

III passo: se $(n,\alpha) = 1$ con $\alpha \neq 1$, $\ldots\ldots$[stop];

IV passo: se $\alpha \notin \{0,1\}$ e $(n,\alpha) \neq 1$,

$(n - n_\alpha)$ autovalori uguali a zero,

$$\begin{aligned} \alpha &= \widehat{\alpha} = \alpha \bmod n_\alpha, \\ n &= n_\alpha = \frac{n}{(n,\alpha)}, \end{aligned}$$

Caso particolare: $n = \alpha^k$

Se $n = \alpha^k$, e partiamo con l'algoritmo ricorsivo, otteniamo

$$\begin{aligned} n_\alpha &= \frac{n}{(n,\alpha)} = \alpha^{k-(k-1)}; \\ \alpha &= 0; \\ n &= \alpha^{k-(k-1)}; \end{aligned}$$

I passo: se $\alpha = 0$, ...[stop];

II passo: se $\alpha = 1$, ...[stop];

III passo: se $(n,\alpha) = 1$ con $\alpha \neq 1$, ...[stop];

IV passo: se $\alpha \notin \{0,1\}$ e $(n,\alpha) \neq 1$,

$(n - n_\alpha)$ autovalori uguali a zero,

$$\begin{aligned} \alpha &= \widehat{\alpha} = \alpha \bmod n_\alpha, \\ n &= n_\alpha = \frac{n}{(n,\alpha)}, \end{aligned}$$

Caso particolare: $n = \alpha^k$

Se $n = \alpha^k$, e partiamo con l'algoritmo ricorsivo, otteniamo

$$\begin{aligned} n_\alpha &= \frac{n}{(n,\alpha)} = \alpha^{k-(k-1)}; \\ \alpha &= 0; \\ n &= \alpha^{k-(k-1)}; \end{aligned}$$

I passo: se $\alpha = 0$, $C_{n,\alpha}$ ha $n-1$ autovalori nulli e un autovalore $\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$[stop];

II passo: se $\alpha = 1$, ...[stop];

III passo: se $(n,\alpha) = 1$ con $\alpha \neq 1$, ...[stop]

IV passo: se $\alpha \notin \{0,1\}$ e $(n,\alpha) \neq 1$, ...

Sommario

- definizione di matrice α-circolante;
  - calcolo diretto dei valori singolari;
  - algoritmo ricorsivo per il calcolo degli autovalori;
- definizione di matrice α-Toeplitz;
  - distribuzione nel senso dei valori singolari.

Sommario

- definizione di matrice α-circolante;
  - calcolo diretto dei valori singolari;
  - algoritmo ricorsivo per il calcolo degli autovalori;
- definizione di matrice α-Toeplitz;
  - distribuzione nel senso dei valori singolari.

Matrici di Toeplitz

Una matrice di Toeplitz T_n è definita in questo modo:

$$\begin{aligned} T_n &= [b_{j-k}]_{j,k=0}^{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} b_0 & b_{-1} & \cdots & b_{-n+1} \\ b_1 & b_0 & \ddots & b_{-n+2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dove i b_k sono i coefficienti di Fourier di una qualche funzione $f \in L^1(-\pi, \pi)$

$$b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \mathrm{d}t$$

Matrici α-Toeplitz

Una matrice α-Toeplitz $T_{n,\alpha}$ è definita in questo modo:

$$\begin{aligned} T_{n,\alpha} &= [b_{j-\alpha k}]_{j,k=0}^{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} b_0 & b_{-\alpha} & \cdots & b_{-(n-1)\alpha} \\ b_1 & b_{1-\alpha} & \ddots & b_{1-(n-1)\alpha} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-1-\alpha} & \cdots & b_{n-1-(n-1)\alpha} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dove i b_k sono i coefficienti di Fourier di una qualche funzione $f \in L^1(-\pi,\pi)$

$$b_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\mathrm{d}t$$

Esempi di matrici α-Toeplitz

Se $n = 5$ e $\alpha = 3$ abbiamo

$$T_{n,\alpha} = \begin{pmatrix} b_0 & b_{-3} & b_{-6} & b_{-9} & b_{-12} \\ b_1 & b_{-2} & b_{-5} & b_{-8} & b_{-11} \\ b_2 & b_{-1} & b_{-4} & b_{-7} & b_{-10} \\ b_3 & b_0 & b_{-3} & b_{-6} & b_{-9} \\ b_4 & b_1 & b_{-2} & b_{-5} & b_{-8} \end{pmatrix}$$

Se $n = 6$ e $\alpha = 3$ abbiamo

$$T_{n,\alpha} = \begin{pmatrix} b_0 & b_{-3} & b_{-6} & b_{-9} & b_{-12} & b_{-15} \\ b_1 & b_{-2} & b_{-5} & b_{-8} & b_{-11} & b_{-14} \\ b_2 & b_{-1} & b_{-4} & b_{-7} & b_{-10} & b_{-13} \\ b_3 & b_0 & b_{-3} & b_{-6} & b_{-9} & b_{-12} \\ b_4 & b_1 & b_{-2} & b_{-5} & b_{-8} & b_{-11} \\ b_5 & b_2 & b_{-1} & b_{-4} & b_{-7} & b_{-10} \end{pmatrix}$$

Sommario

- definizione di matrice α-circolante;
  - calcolo diretto dei valori singolari;
  - algoritmo ricorsivo per il calcolo degli autovalori;
- definizione di matrice α-Toeplitz;
  - distribuzione nel senso dei valori singolari.

Sommario

- definizione di matrice α-circolante;
  - calcolo diretto dei valori singolari;
  - algoritmo ricorsivo per il calcolo degli autovalori;
- definizione di matrice α-Toeplitz;
  - distribuzione nel senso dei valori singolari.

Esempi di matrici α-Toeplitz

Se $n = 5$ e $\alpha = 3$ abbiamo

$$T_{n,\alpha} = \begin{pmatrix} b_0 & b_{-3} & b_{-6} & b_{-9} & b_{-12} \\ b_1 & b_{-2} & b_{-5} & b_{-8} & b_{-11} \\ b_2 & b_{-1} & b_{-4} & b_{-7} & b_{-10} \\ b_3 & b_0 & b_{-3} & b_{-6} & b_{-9} \\ b_4 & b_1 & b_{-2} & b_{-5} & b_{-8} \end{pmatrix}$$

Esempi di matrici α-Toeplitz

Se $n = 5$ e $\alpha = 3$ abbiamo

$$T_{n,\alpha} = \begin{pmatrix} b_0 & b_{-3} & b_{-6} & b_{-9} & b_{-12} \\ b_1 & b_{-2} & b_{-5} & b_{-8} & b_{-11} \\ b_2 & b_{-1} & b_{-4} & b_{-7} & b_{-10} \\ b_3 & b_0 & b_{-3} & b_{-6} & b_{-9} \\ b_4 & b_1 & b_{-2} & b_{-5} & b_{-8} \end{pmatrix}$$

Esempi di matrici α-Toeplitz

Se $n = 5$ e $\alpha = 3$ abbiamo

$$T_{n,\alpha} = \begin{pmatrix} {\color{red}b_0} & {\color{red}b_{-3}} & {\color{blue}b_{-6}} & {\color{blue}b_{-9}} & {\color{blue}b_{-12}} \\ {\color{red}b_1} & {\color{red}b_{-2}} & {\color{blue}b_{-5}} & {\color{blue}b_{-8}} & {\color{blue}b_{-11}} \\ {\color{red}b_2} & {\color{red}b_{-1}} & {\color{blue}b_{-4}} & {\color{blue}b_{-7}} & {\color{blue}b_{-10}} \\ {\color{red}b_3} & {\color{red}b_0} & {\color{blue}b_{-3}} & {\color{blue}b_{-6}} & {\color{blue}b_{-9}} \\ {\color{red}b_4} & {\color{red}b_1} & {\color{blue}b_{-2}} & {\color{blue}b_{-5}} & {\color{blue}b_{-8}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_{n,\alpha} &= \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{{\color{red}\blacksquare}}_{n\times\lceil\frac{n}{\alpha}\rceil} & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & \underbrace{{\color{blue}\blacksquare}}_{n\times n-\lceil\frac{n}{\alpha}\rceil} \end{array}\right] \\ &= \end{aligned}$$

Esempi di matrici α-Toeplitz

Se $n = 5$ e $\alpha = 3$ abbiamo

$$T_{n,\alpha} = \begin{pmatrix} b_0 & b_{-3} & b_{-6} & b_{-9} & b_{-12} \\ b_1 & b_{-2} & b_{-5} & b_{-8} & b_{-11} \\ b_2 & b_{-1} & b_{-4} & b_{-7} & b_{-10} \\ b_3 & b_0 & b_{-3} & b_{-6} & b_{-9} \\ b_4 & b_1 & b_{-2} & b_{-5} & b_{-8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_{n,\alpha} &= \left[\underbrace{\blacksquare}_{n \times \lceil \frac{n}{\alpha} \rceil} \;\middle|\; 0 \right] + \left[0 \;\middle|\; \underbrace{\blacksquare}_{n \times n - \lceil \frac{n}{\alpha} \rceil} \right] \\ &= [T_n \widehat{Z}_{n,\alpha} | 0] + [0 | \widehat{H}] \end{aligned}$$

Valori singolari di matrici α-Toeplitz

$$T_{n,\alpha} = [T_n \widehat{Z}_{n,\alpha}|0] + [0|\widehat{H}]$$

$$\{T_n \widehat{Z}_{n,\alpha}\} \sim_\sigma \widetilde{f}$$

dove

$$\widetilde{f} = \sqrt{\left| \frac{1}{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha-1} |f|^2 \left(\frac{x + 2\pi j}{\alpha} \right) \right|}$$

$$\{\widehat{H}\} \sim_\sigma 0$$

Valori singolari di matrici α-Toeplitz

La successione $\{T_{n,\alpha}\}$ ha $\mu_\alpha = \left\lceil \frac{n}{\alpha} \right\rceil$ valori singolari che si distribuiscono come $\widetilde{f}$ e $n - \left\lceil \frac{n}{\alpha} \right\rceil$ valori singolari nulli

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} F(\sigma_j) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\mu_\alpha} F(\widetilde{\sigma}_j) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=\mu_\alpha+1}^{n} F(0) \\ &= \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\widetilde{f}(x))dx + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) F(0). \end{aligned}$$

$$\{T_{n,\alpha}\} \sim_\sigma (\theta, [-\pi, \pi] \times [0, 1]),$$

dove

$$\theta(x,t) = \begin{cases} \widetilde{f}(x) & \text{per } t \in [0, \frac{1}{\alpha}] \\ 0 & \text{per } t \in (\frac{1}{\alpha}, 1] \end{cases}$$