Tecniche di Regolarizzazione in Elaborazione di Immagini

Ivan Gerace, Francesca Martinelli e Patrizia Pucci

Università degli Studi di Perugia

Giornate di Algebra Lineare e Applicazioni 2009

PROBLEMA CONTINUO

$$y(t,z) = \int\int_{\Omega} \zeta(t,\xi,z,\eta)x(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi \quad \forall (t,z) \in \Omega$$

Problema Continuo

$$y(t,z) = \int\int_{\Omega} \zeta(t,\xi,z,\eta)x(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi \quad \forall (t,z) \in \Omega$$

x intensità luminosa del piano oggetto Ω
y livello di grigio dell'immagine riprodotta
ζ funzione di dispersione puntuale

Problema Continuo

$$y(t,z) = \int\int_{\Omega} \zeta(t,\xi,z,\eta)x(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi \quad \forall (t,z) \in \Omega$$

x intensità luminosa del piano oggetto Ω
y livello di grigio dell'immagine riprodotta
ζ funzione di dispersione puntuale

$$\tilde{y}(t,z) = y(t,z) + n(t,z) \quad \forall (t,z) \in \Omega$$

n rumore bianco, Gaussiano, con media nulla e varianza nota

Problema Continuo

$$y = Ax,$$

$x \in X$
$y \in Y$
X, Y spazi di Hilbert
$A : X \rightarrow Y$ operatore lineare

MAL–POSIZIONE DEL PROBLEMA

Un problema si dice ben–posto nel senso di Hadamard se

- la soluzione esiste

Un problema si dice ben–posto nel senso di Hadamard se

- la soluzione esiste
- la soluzione è unica

Un problema si dice ben–posto nel senso di Hadamard se

- la soluzione esiste
- la soluzione è unica
- la soluzione dipende con continuità dai dati

Th di Picard

i) Sia A operatore compatto

Th di Picard

I) Sia A operatore compatto

II) $\{\mu_\nu, \varphi_\nu, \psi_\nu\}$ decomposizione ai valori singolari di A

TH DI PICARD

I) Sia A operatore compatto

II) $\{\mu_\nu, \varphi_\nu, \psi_\nu\}$ decomposizione ai valori singolari di A

III) $y \in \overline{A(X)}$, con $\overline{A(X)}$ chiusura di $A(X)$

Regolarizzazione del Problema

Th di Picard

I) Sia A operatore compatto

II) $\{\mu_\nu, \varphi_\nu, \psi_\nu\}$ decomposizione ai valori singolari di A

III) $y \in \overline{A(X)}$, con $\overline{A(X)}$ chiusura di $A(X)$

IV) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_\nu^2} |(y, \psi_\nu)|^2$ converge

TH DI PICARD

I) Sia A operatore compatto

II) $\{\mu_\nu, \varphi_\nu, \psi_\nu\}$ decomposizione ai valori singolari di A

III) $y \in \overline{A(X)}$, con $\overline{A(X)}$ chiusura di $A(X)$

IV) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_\nu^2} |(y, \psi_\nu)|^2$ converge

Allora

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_\nu} (y, \psi_\nu)\varphi_\nu$$

Metodi di Regolarizzazione

Hanno il compito di fornire una approssimazione stabile della soluzione di un problema mal–posto.

Hanno il compito di fornire una approssimazione stabile della soluzione di un problema mal–posto.

DEFINIZIONE

Operatori di regolarizzazione

$$R_{\lambda^2} : Y \rightarrow X$$

t.c.

$$\lim_{\lambda^2 \rightarrow 0} R_{\lambda^2} = A^{-1}$$

Hanno il compito di fornire una approssimazione stabile della soluzione di un problema mal–posto.

Definizione

Operatori di regolarizzazione

$$R_{\lambda^2} : Y \to X$$

t.c.

$$\lim_{\lambda^2 \to 0} R_{\lambda^2} = A^{-1}$$

λ parametro di regolarizzazione

CARATTERIZZAZIONE OPERATORI DI REGOLARIZZAZIONE

I) A operatore lineare, compatto, iniettivo

CARATTERIZZAZIONE OPERATORI DI REGOLARIZZAZIONE

I) A operatore lineare, compatto, iniettivo

II) $\{\mu_\nu, \varphi_\nu, \psi_\nu\}$ decomposizione ai valori singolari di A

CARATTERIZZAZIONE OPERATORI DI REGOLARIZZAZIONE

I) A operatore lineare, compatto, iniettivo

II) $\{\mu_\nu, \varphi_\nu, \psi_\nu\}$ decomposizione ai valori singolari di A

III) q: $(0, \infty) \times (0, \|A\|] \to \mathbb{R}^n$ funzione limitata t.c.

- Per ogni λ^2 esiste una costante positiva $c(\lambda^2)$ tale che

$$|q(\lambda^2, \mu)| \leq c(\lambda^2)\mu, \ \ \forall \ \ \mu \in (0, \|A\|),$$

- Per ogni $0 < \mu \leq \|A\|$ si ha che $\lim\limits_{\lambda^2 \to 0} q(\lambda^2, \mu) = 1.$

CARATTERIZZAZIONE OPERATORI DI REGOLARIZZAZIONE

I) A operatore lineare, compatto, iniettivo

II) $\{\mu_\nu, \varphi_\nu, \psi_\nu\}$ decomposizione ai valori singolari di A

III) q: $(0, \infty) \times (0, \|A\|] \to \mathbb{R}^n$ funzione limitata t.c.

- Per ogni λ^2 esiste una costante positiva $c(\lambda^2)$ tale che

$$|q(\lambda^2, \mu)| \leq c(\lambda^2)\mu, \quad \forall \quad \mu \in (0, \|A\|),$$

- Per ogni $0 < \mu \leq \|A\|$ si ha che $\lim_{\lambda^2 \to 0} q(\lambda^2, \mu) = 1.$

Allora

$$R_{\lambda^2} y = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_\nu} q(\lambda^2, \mu_\nu) \, (y, \psi_\nu) \, \varphi_\nu$$

è una soluzione regolarizzata

Regolarizzazione di Tikhonov

$$q(\lambda^2, \mu) = \frac{\mu^2}{(\lambda^2 + \mu^2)}$$

$$R_{\lambda^2} = (\lambda^2 I + A^* A)^{-1} A^*$$

Regolarizzazione di Tikhonov

$$q(\lambda^2, \mu) = \frac{\mu^2}{(\lambda^2 + \mu^2)}$$

$$R_{\lambda^2} = (\lambda^2 I + A^* A)^{-1} A^*$$

La soluzione regolarizzata di Tikhonov equivale a determinare il minimo della funzione energia

$$E(x) = T(x, y) + \lambda^2 S(x)$$

Regolarizzazione di Tikhonov

$$q(\lambda^2, \mu) = \frac{\mu^2}{(\lambda^2 + \mu^2)}$$

$$R_{\lambda^2} = (\lambda^2 I + A^* A)^{-1} A^*$$

La soluzione regolarizzata di Tikhonov equivale a determinare il minimo della funzione energia

$$E(x) = T(x, y) + \lambda^2 S(x)$$

$T(x, y) = \|Ax - y\|^2$ termine di consistenza ai dati

$$q(\lambda^2, \mu) = \frac{\mu^2}{(\lambda^2 + \mu^2)}$$

$$R_{\lambda^2} = (\lambda^2 I + A^* A)^{-1} A^*$$

La soluzione regolarizzata di Tikhonov equivale a determinare il minimo della funzione energia

$$E(x) = T(x, y) + \lambda^2 S(x)$$

$T(x, y) = \|Ax - y\|^2$ termine di consistenza ai dati
$S(x) = \|O(x)\|^2$ termine di regolarizzazione

$$q(\lambda^2, \mu) = \frac{\mu^2}{(\lambda^2 + \mu^2)}$$

$$R_{\lambda^2} = (\lambda^2 I + A^* A)^{-1} A^*$$

La soluzione regolarizzata di Tikhonov equivale a determinare il minimo della funzione energia

$$E(x) = T(x, y) + \lambda^2 S(x)$$

$T(x, y) = \|Ax - y\|^2$ termine di consistenza ai dati
$S(x) = \|O(x)\|^2$ termine di regolarizzazione
$O(x)$ operatore che rispecchia le proprietà a priori della soluzione

$$q(\lambda^2, \mu) = \frac{\mu^2}{(\lambda^2 + \mu^2)}$$

$$R_{\lambda^2} = (\lambda^2 I + A^* A)^{-1} A^*$$

La soluzione regolarizzata di Tikhonov equivale a determinare il minimo della funzione energia

$$E(x) = T(x, y) + \lambda^2 S(x)$$

$T(x, y) = \|Ax - y\|^2$ termine di consistenza ai dati
$S(x) = \|O(x)\|^2$ termine di regolarizzazione
$O(x)$ operatore che rispecchia le proprietà a priori della soluzione
λ parametro di regolarizzazione

Problema Discreto

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}$$

Problema Discreto

$$y = Ax + n$$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{nm}$ immagine originale
$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{nm}$ immagine osservata
$\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^{nm}$ rumore bianco, Gaussiano con media zero e varianza σ^2 nota
$A \in \mathbb{R}^{nm} \times \mathbb{R}^{nm}$

Problema Discreto

Soluzione Regolarizzata

$$\boldsymbol{x} = \arg\min_{\boldsymbol{x}} E(\boldsymbol{x})$$

$$E(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \lambda^2 S(\boldsymbol{x}),$$

Problema Discreto

Soluzione Regolarizzata

$$\boldsymbol{x} = \arg\min_{\boldsymbol{x}} E(\boldsymbol{x})$$

$$E(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \lambda^2 S(\boldsymbol{x}),$$

$T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}\|^2$ termine di consistenza con i dati
$S(\boldsymbol{x}) = \|O(\boldsymbol{x})\|^2$ termine di regolarizzazione
O operatore legato alle proprietà note a priori della soluzione
λ^2 parametro di regolarizzazione

Se si impone un vincolo di smoothness sulla soluzione:

$$S(\boldsymbol{x}) = \sum_{c \in C_k} (D_c^k \boldsymbol{x})^2$$

Se si impone un vincolo di smoothness sulla soluzione:

$$S(\boldsymbol{x}) = \sum_{c \in C_k} (D_c^k \boldsymbol{x})^2$$

c è una clique di ordine k

Se si impone un vincolo di smoothness sulla soluzione:

$$S(\boldsymbol{x}) = \sum_{c \in C_k} (D_c^k \boldsymbol{x})^2$$

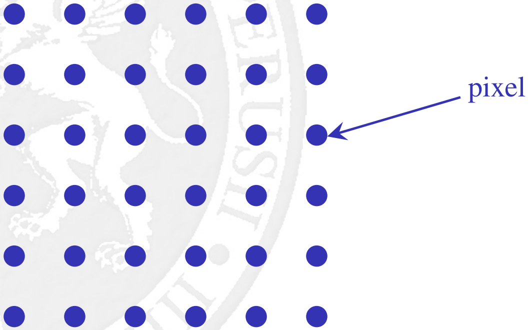
c è una clique di ordine k
D_c^k è la derivata finita di ordine k associato alla clique c

Se si impone un vincolo di smoothness sulla soluzione:

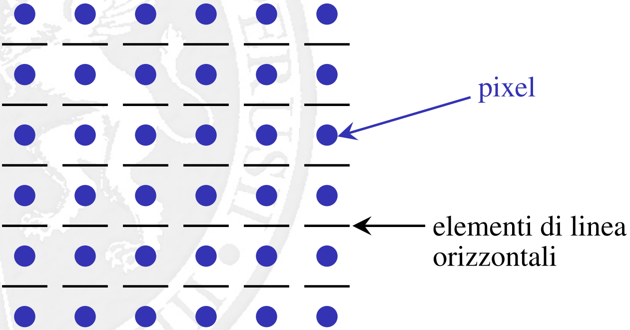
$$S(\boldsymbol{x}) = \sum_{c \in C_k} (D_c^k \boldsymbol{x})^2$$

c è una clique di ordine k
D_c^k è la derivata finita di ordine k associato alla clique c
C_k è l'insieme di tutte le clique di ordine k dell'immagine

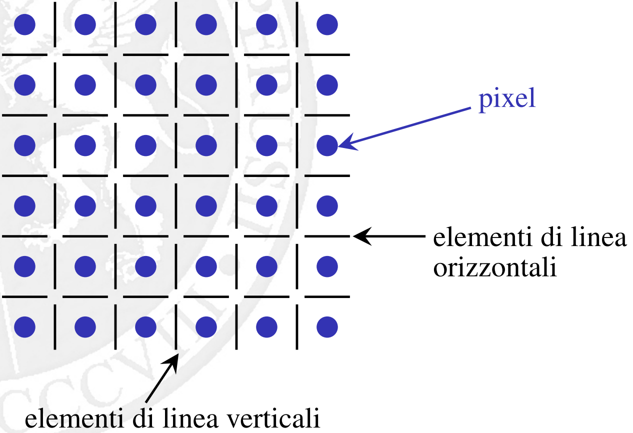
Preservazione delle Discontinuità



Preservazione delle Discontinuità



Preservazione delle Discontinuità



Preservazione delle Discontinuità

$$S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = \sum_{c \in C_k} \left[(D_c^k \boldsymbol{x})^2 b_c + \beta(b_c) \right]$$

$$S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = \sum_{c \in C_k} [(D_c^k \boldsymbol{x})^2 b_c + \beta(b_c)]$$

$b_c \in B$ è la variabile di linea corrispondente alla clique c,

$$S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = \sum_{c \in C_k} [(D_c^k \boldsymbol{x})^2 b_c + \beta(b_c)]$$

$b_c \in B$ è la variabile di linea corrispondente alla clique c,
$\beta : C_k \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione decrescente

Preservazione delle Discontinuità

$$S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) = \sum_{c \in C_k} \left[(D_c^k \boldsymbol{x})^2 b_c + \beta(b_c) \right]$$

$b_c \in B$ è la variabile di linea corrispondente alla clique c,
$\beta : C_k \to \mathbb{R}$ è una funzione decrescente
$\boldsymbol{b}$ è il vettore degli elementi di linea

Funzione Energia: Espressione Generale

$$E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) = T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \sum_{i=1}^{3} {\lambda_i}^2 S^{(i)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}^{(i)}),$$

Funzione Energia: Espressione Generale

$$E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) = T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \sum_{i=1}^{3} {\lambda_i}^2 S^{(i)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}^{(i)}),$$

$$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}^{(1)},\boldsymbol{b}^{(2)},\boldsymbol{b}^{(3)}) \in \bar{B} = \mathbb{R}^t, \quad t = \sum_{i=1}^{3} |C^{(i)}|, \quad \boldsymbol{b}^{(i)} \in \mathbb{R}^{|C^{(i)}|}$$

FUNZIONE ENERGIA: ESPRESSIONE GENERALE

$$E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) = T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \sum_{i=1}^{3} {\lambda_i}^2 S^{(i)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}^{(i)}),$$

$$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}^{(1)},\boldsymbol{b}^{(2)},\boldsymbol{b}^{(3)}) \in \bar{B} = \mathbb{R}^t, \quad t = \sum_{i=1}^{3} |C^{(i)}|, \quad \boldsymbol{b}^{(i)} \in \mathbb{R}^{|C^{(i)}|}$$

$$S^{(i)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) = \sum_{c \in C^{(i)}} \left[(D_c^i(\boldsymbol{x}))^2 b_c^{(i)} + \beta^{(i)}(b_c^{(i)}) \right]$$

$$E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) = T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i{}^2 S^{(i)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}^{(i)}),$$

$$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}^{(1)},\boldsymbol{b}^{(2)},\boldsymbol{b}^{(3)}) \in \bar{B} = \mathbb{R}^t, \quad t = \sum_{i=1}^{3} |C^{(i)}|, \quad \boldsymbol{b}^{(i)} \in \mathbb{R}^{|C^{(i)}|}$$

$$S^{(i)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) = \sum_{c\in C^{(i)}} \left[(D_c^i(\boldsymbol{x}))^2 b_c^{(i)} + \beta^{(i)}(b_c^{(i)})\right]$$

Caso Booleano

$$b_c^{(i)} \in B = \{0,1\}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}^*(\boldsymbol{x}) &= \arg\min_{\boldsymbol{b}\in\bar{B}} E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}), \\ \bar{\boldsymbol{x}} &= \arg\min_{\boldsymbol{x}} E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}^*(\boldsymbol{x})), \end{aligned}$$

DEFINIZIONE

Si definisce energia duale [Geman, Reynolds,1992]

$$E_d(\boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{b}\in B^{|C_k|}} E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}),$$

ENERGIA DUALE

$$E_d(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i{}^2 S_d^{(i)}(\boldsymbol{x})$$

Energia Duale

$$E_d(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \sum_{i=1}^{3} {\lambda_i}^2 S_d^{(i)}(\boldsymbol{x})$$

$$S_d^{(i)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{c \in C^{(i)}} g^{(i)}\left(\left(D_c^i \boldsymbol{x}\right)^2\right)$$

ENERGIA DUALE

$$E_d(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \sum_{i=1}^{3} {\lambda_i}^2 S_d^{(i)}(\boldsymbol{x})$$

$$S_d^{(i)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{c \in C^{(i)}} g^{(i)}\left(\left(D_c^i \boldsymbol{x}\right)^2\right)$$

$$g^{(i)}(t) = \inf_{b_c^{(i)} \in \mathbb{R}} \{b_c^{(i)} t^2 + \beta^{(i)}(b_c^{(i)})\}$$

Energia Duale

$$E_d(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i{}^2 S_d^{(i)}(\boldsymbol{x})$$

$$S_d^{(i)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{c \in C^{(i)}} g^{(i)}\left(\left(D_c^i \boldsymbol{x}\right)^2\right)$$

$$g^{(i)}(t) = \inf_{b_c^{(i)} \in \mathbb{R}} \{b_c^{(i)} t^2 + \beta^{(i)}(b_c^{(i)})\}$$

$g^{(i)}$ funzioni di interazione

Caso Booleano

Se $\quad b \in B = \{0, 1\} \quad$ e $\quad \beta(b) = \kappa^2(1 - b)$

$$g(t) = \inf\{t^2, \kappa^2\} = \begin{cases} t^2, & \text{se} |t| < \kappa \\ \kappa^2, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

κ soglia di discontinuità

CORRISPONDENZA TRA β E g

$$g(t) = \inf_{b_c \in \mathbb{R}} \{b_c t^2 + \beta(b_c)\}$$

CORRISPONDENZA TRA β E g

$$g(t) = \inf_{b_c \in \mathbb{R}} \{b_c t^2 + \beta(b_c)\}$$

β t.c.

- $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \cup +\infty$

Corrispondenza tra β e g

$$g(t) = \inf_{b_c \in \mathbb{R}} \{b_c t^2 + \beta(b_c)\}$$

β t.c.

- $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \cup +\infty$
- $\beta \not\equiv 0$, $\beta(b) \geq 0 \;\; \forall b \in \mathbb{R}$, β è una funzione non crescente

CORRISPONDENZA TRA β E g

$$g(t) = \inf_{b_c \in \mathbb{R}} \{b_c t^2 + \beta(b_c)\}$$

β t.c.

- $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \cup +\infty$
- $\beta \not\equiv 0$, $\beta(b) \geq 0 \ \ \forall b \in \mathbb{R}$, β è una funzione non crescente
- β è convessa

CORRISPONDENZA TRA β E g

$$g(t) = \inf_{b_c \in \mathbb{R}} \{b_c t^2 + \beta(b_c)\}$$

β t.c.

- $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \cup +\infty$
- $\beta \not\equiv 0$, $\beta(b) \geq 0 \ \ \forall b \in \mathbb{R}$, β è una funzione non crescente
- β è convessa
- se $b \neq 0$, $\beta(b) < +\infty$ se e soltanto se $b > 0$

Corrispondenza tra β e g

$$g(t) = \inf_{b_c \in \mathbb{R}} \{b_c t^2 + \beta(b_c)\}$$

β t.c.

- $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \cup +\infty$
- $\beta \not\equiv 0$, $\beta(b) \geq 0 \ \ \forall b \in \mathbb{R}$, β è una funzione non crescente
- β è convessa
- se $b \neq 0$, $\beta(b) < +\infty$ se e soltanto se $b > 0$
- $\lim_{b \to +\infty} \beta(b) = 0, \ \lim_{b \to 0^+} \beta(b) = \beta(0) > 0$

CORRISPONDENZA TRA β E g

$$g(t) = \inf_{b_c \in \mathbb{R}} \{b_c t^2 + \beta(b_c)\}$$

β t.c.

- $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \cup +\infty$
- $\beta \not\equiv 0$, $\beta(b) \geq 0 \;\; \forall b \in \mathbb{R}$, β è una funzione non crescente
- β è convessa
- se $b \neq 0$, $\beta(b) < +\infty$ se e soltanto se $b > 0$
- $\lim\limits_{b \to +\infty} \beta(b) = 0, \; \lim\limits_{b \to 0^+} \beta(b) = \beta(0) > 0$

DEFINIZIONE [ROCKAFELLAR, 1970]

Sia f una funzione definita in $\mathbb{R}$, la funzione

$$f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{xy - f(x)\}\ \forall y \in \mathbb{R}$$

è chiamata coniugata di f.

DEFINIZIONE [ROCKAFELLAR,1970]

Sia f una funzione definita in $\mathbb{R}$, la funzione

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{xy - f(x)\} \ \forall y \in \mathbb{R}$$

è chiamata coniugata di f.

PROPRIETÀ

Sia f una funzione propria, chiusa e convessa in $\mathbb{R}$.
f^* è una funzione propria, chiusa e convessa e la coniugata f^{**} di f^* coincide con f.

$$\beta^*(t) = \sup_{b\in\mathbb{R}}\{bt - \beta(b)\} = -\inf_{b\in\mathbb{R}}\{-bt + \beta(b)\}\ \forall t \in \mathbb{R}$$

CORRISPONDENZA TRA β E g

$$\beta^*(t) = \sup_{b\in\mathbb{R}}\{bt - \beta(b)\} = -\inf_{b\in\mathbb{R}}\{-bt + \beta(b)\}\ \forall t \in \mathbb{R}$$

β^* è una funzione convessa semi–continua inferiormente

CORRISPONDENZA TRA β E g

$$\beta^*(t) = \sup_{b\in\mathbb{R}}\{bt - \beta(b)\} = -\inf_{b\in\mathbb{R}}\{-bt + \beta(b)\}\ \forall t \in \mathbb{R}$$

β^* è una funzione convessa semi–continua inferiormente

$$f(t) := -\beta^*(-t) = \inf_{b\in\mathbb{R}}\{bt + \beta(b)\} = \inf_{b\in\mathbb{R}_0^+}\{bt + \beta(b)\}\forall t \in \mathbb{R}$$

Corrispondenza tra β e g

$$\beta^*(t) = \sup_{b\in\mathbb{R}}\{bt - \beta(b)\} = -\inf_{b\in\mathbb{R}}\{-bt + \beta(b)\}\ \forall t \in \mathbb{R}$$

β^* è una funzione convessa semi–continua inferiormente

$$f(t) := -\beta^*(-t) = \inf_{b\in\mathbb{R}}\{bt + \beta(b)\} = \inf_{b\in\mathbb{R}_0^+}\{bt + \beta(b)\}\forall t \in \mathbb{R}$$

f è una funzione concava semi–continua superiormente

$$\beta^*(t) = \sup_{b\in\mathbb{R}}\{bt - \beta(b)\} = -\inf_{b\in\mathbb{R}}\{-bt + \beta(b)\}\ \forall t \in \mathbb{R}$$

β^* è una funzione convessa semi–continua inferiormente

$$f(t) := -\beta^*(-t) = \inf_{b\in\mathbb{R}}\{bt + \beta(b)\} = \inf_{b\in\mathbb{R}_0^+}\{bt + \beta(b)\}\forall t \in \mathbb{R}$$

f è una funzione concava semi–continua superiormente

$$g(t) = \inf_{b\in\mathbb{R}}\{bt^2 + \beta(b)\}$$

$$f(t) = g(\sqrt{t}),\ \forall\, t \geq 0$$

Corrispondenza tra β e g

$$\lim_{b \to +\infty} (bt + \beta(b)) = \begin{cases} -\infty & \text{se } t < 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \\ +\infty & \text{se } t > 0 \end{cases},$$

$$\lim_{b\to+\infty}(bt+\beta(b)) = \begin{cases} -\infty & \text{se } t<0 \\ 0 & \text{se } t=0 \\ +\infty & \text{se } t>0 \end{cases},$$

$$f(t) = -\infty \iff t<0$$

Corrispondenza tra β e g

$$\lim_{b\to+\infty}(bt+\beta(b)) = \begin{cases} -\infty & \text{se } t<0 \\ 0 & \text{se } t=0 \\ +\infty & \text{se } t>0 \end{cases},$$

$$f(t) = -\infty \iff t<0$$

$$f(t) = \begin{cases} g(\sqrt{t}), & \text{se } t\geq 0 \\ -\infty, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\lim_{b \to +\infty} (bt + \beta(b)) = \begin{cases} -\infty & \text{se } t < 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \\ +\infty & \text{se } t > 0 \end{cases},$$

$$f(t) = -\infty \iff t < 0$$

$$f(t) = \begin{cases} g(\sqrt{t}), & \text{se } t \geq 0 \\ -\infty, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f(0) = g(0) = 0$$

Corrispondenza tra β e g

$$\lim_{b\to+\infty}(bt+\beta(b)) = \begin{cases} -\infty & \text{se } t<0 \\ 0 & \text{se } t=0 \\ +\infty & \text{se } t>0 \end{cases},$$

$$f(t)=-\infty \iff t<0$$

$$f(t)=\begin{cases} g(\sqrt{t}), & \text{se } t\geq 0 \\ -\infty, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f(0)=g(0)=0$$

concavità + semi–continuità superiore di $f \Rightarrow f \in C(\mathbb{R}^+)$

Corrispondenza tra β e g

g è pari

CORRISPONDENZA TRA β E g

g è pari

$g \in C(\mathbb{R})$ poichè $\lim_{t \to 0^+} f(t) = f(0)$

CORRISPONDENZA TRA β E g

g è pari

$g \in C(\mathbb{R})$ poichè $\lim_{t \to 0^+} f(t) = f(0)$

f non decrescente in $\mathbb{R} \Rightarrow g$ non decrescente in $\mathbb{R}_0^+$

CORRISPONDENZA TRA β E g

g è pari

$g \in C(\mathbb{R})$ poichè $\lim_{t \to 0^+} f(t) = f(0)$

f non decrescente in $\mathbb{R} \Rightarrow g$ non decrescente in $\mathbb{R}_0^+$

$\beta(0) > 0, f$ non decrescente $\Rightarrow$

$0 < \beta(0) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{-\beta^*(t)\} = \sup_{t \in \mathbb{R}} f(t) = \lim_{t \to +\infty} f(t) \leq +\infty$ quindi $g \not\equiv 0$

Corrispondenza tra β e g

g è pari

$g \in C(\mathbb{R})$ poichè $\lim_{t \to 0^+} f(t) = f(0)$

f non decrescente in $\mathbb{R} \Rightarrow g$ non decrescente in $\mathbb{R}_0^+$

$\beta(0) > 0, f$ non decrescente $\Rightarrow$

$0 < \beta(0) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{-\beta^*(t)\} = \sup_{t \in \mathbb{R}} f(t) = \lim_{t \to +\infty} f(t) \leq +\infty$ quindi $g \not\equiv 0$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t} = 0$$

CORRISPONDENZA TRA β E g

g è pari

$g \in C(\mathbb{R})$ poichè $\lim_{t \to 0^+} f(t) = f(0)$

f non decrescente in $\mathbb{R} \Rightarrow g$ non decrescente in $\mathbb{R}_0^+$

$\beta(0) > 0, f$ non decrescente $\Rightarrow$

$0 < \beta(0) = \sup_{t\in\mathbb{R}}\{-\beta^*(t)\} = \sup_{t\in\mathbb{R}} f(t) = \lim_{t\to+\infty} f(t) \leq +\infty$ quindi $g \not\equiv 0$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} = 0$$

OSSERVAZIONE

Non è restrittivo scegliere β convessa

Corrispondenza tra β e g

Teorema [Gerace, M. e Pucci]

Sia $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \cup +\infty$ tale che

I) $g(t) = \inf_{b \in \mathbb{R}} \{bt^2 + \beta(b)\} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

II) $\beta \not\equiv 0$, $\beta(b) \geq 0 \quad \forall b \in \mathbb{R}$, β è una funzione non crescente e convessa;

III) se $b \neq 0$, $\beta(b) < +\infty$ se e soltanto se $b > 0$;

IV) $\lim_{b \to +\infty} \beta(b) = 0$, $\lim_{b \to 0^+} \beta(b) = \beta(0) > 0$.

TEOREMA [GERACE, M. E PUCCI]

Sia $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \cup +\infty$ tale che

I) $g(t) = \inf_{b\in\mathbb{R}} \{bt^2 + \beta(b)\} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

II) $\beta \not\equiv 0$, $\beta(b) \geq 0 \quad \forall b \in \mathbb{R}$, β è una funzione non crescente e convessa;

III) se $b \neq 0$, $\beta(b) < +\infty$ se e soltanto se $b > 0$;

IV) $\lim_{b\to+\infty} \beta(b) = 0$, $\lim_{b\to 0^+} \beta(b) = \beta(0) > 0$.

Allora esiste $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

V) $g(t) = \inf_{b\in\mathbb{R}} \{bt^2 + \beta(b)\} \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

VI) $g(0) = 0$, $g \not\equiv 0$, g è una funzione pari, continua non decrescente in $\mathbb{R}_0^+$;

VII) la funzione $f(t) = \begin{cases} g(\sqrt{t}), & \text{se } t \geq 0 \\ -\infty, & \text{altrimenti} \end{cases}$ è concava e $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} = 0$.

TEOREMA DI DUALITÀ

$$\boxed{B, \beta} \quad \overset{?}{\Longleftrightarrow} \quad \boxed{g}$$

B insieme dei valori di una variabile di linea
β funzione peso delle variabili di linea nell'energia primale
g funzione di interazione nell'energia duale

Teorema di dualità

Geman e Reynolds, 1992

Charbonnier, Blanc-Féraud, Aubert e Barlaud, 1997

Boccuto, Discepoli, Gerace, Pandolfi e Pucci, 2002

Teorema [Gerace, M. e Pucci]

$$\begin{matrix} \text{I)} \\ \text{II)} \end{matrix} \iff \begin{matrix} \text{III)} \\ \text{IV)} \\ \text{V)} \\ \text{VI)} \end{matrix}$$

IMPLICAZIONE INVERSA

$$\vartheta(t) = -f(t)\ \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Implicazione inversa

$$\vartheta(t) = -f(t) \ \forall\ t \in \mathbb{R}$$

$$\beta(b) := \vartheta^*(-b) \ \forall\ b \in \mathbb{R}$$

Implicazione inversa

$$\vartheta(t) = -f(t) \; \forall \, t \in \mathbb{R}$$

$$\beta(b) := \vartheta^*(-b) \; \forall \, b \in \mathbb{R}$$

$$\beta(b) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{-bt - \vartheta(t)\} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{-bt + f(t)\} = \sup_{t \in \mathbb{R}_0^+} \{-bt + f(t)\} \quad \forall \, b \in \mathbb{R}$$

$$\vartheta(t) = -f(t)\ \forall\ t \in \mathbb{R}$$

$$\beta(b) := \vartheta^*(-b)\ \forall\ b \in \mathbb{R}$$

$$\beta(b) = \sup_{t\in\mathbb{R}}\{-bt - \vartheta(t)\} = \sup_{t\in\mathbb{R}}\{-bt + f(t)\} = \sup_{t\in\mathbb{R}_0^+}\{-bt + f(t)\} \quad \forall\ b \in \mathbb{R}$$

$$\theta(t) = \theta^{**}(t)\ \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) = \inf_{b\in\mathbb{R}}\{bt + \vartheta^*(b)\} \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$$

	$g(t)$	Th GR	Th CBAB	Th BDGPP	Th GM
Variazione Totale	$\|t\|$	no	no	si	si
Bouman e Sauer	$\|t\|^{\alpha}, 1 \leq \alpha \leq 2$	no	no	no	si
Perona e Malik	$-\exp(-t^2) + 1$	si	si	si	si
Geman e McClure	$\frac{t^2}{1+t^2}$	si	si	si	si
Hebert e Leahy	$\log(1 + t^2)$	no	si	si	si
Aubert et a	$\sqrt{1 + t^2} - 1$	no	si	si	si
Blake e Zissermann	$\inf\{t^2, \kappa^2\}$	si	no	si	si
Shulman e Hervé	$\inf\{t^2, 2\kappa t - \kappa^2\}$	no	no	si	si

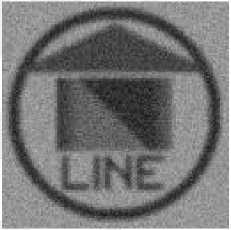
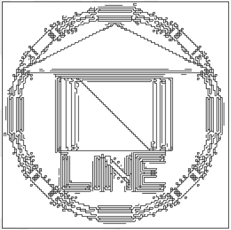


Immagine Osservata



Elementi di Linea

Interazioni tra le variabili di linea

$$E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) = T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \sum_{i=1}^{3} {\lambda_i}^2 S^{(i)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}^{(i)}) + \sum_{i=1}^{3} {\lambda_i}^2 Q^{(i)}(\boldsymbol{b})$$

$$Q^{(i)}(\boldsymbol{b}) = \sum_{c\in\Gamma} \rho(b_c, b_{c-k})$$

Interazioni tra le variabili di linea

$$E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) = T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \sum_{i=1}^{3} {\lambda_i}^2 S^{(i)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}^{(i)}) + \sum_{i=1}^{3} {\lambda_i}^2 Q^{(i)}(\boldsymbol{b})$$

$$Q^{(i)}(\boldsymbol{b}) = \sum_{c\in\Gamma} \rho(b_c, b_{c-k})$$

$$E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) = T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \sum_{i=1}^{3} {\lambda_i}^2 \bar{S}^{(i)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}^{(i)})$$

$$\bar{S}^{(i)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) = \sum_{c\in C^{(i)}} \left[(D^i(\boldsymbol{x}))^2 b_c^{(i)} + \beta^{(i)}(b_c^{(i)}) + \rho(b_c^{(i)}, \mu(D_{c-1}^i(\boldsymbol{x}))) \right]$$

Energia Duale

$$E_d(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i{}^2 \bar{S}_d^{(i)}(\boldsymbol{x})$$

ENERGIA DUALE

$$E_d(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \sum_{i=1}^{3} {\lambda_i}^2 \bar{S}_d^{(i)}(\boldsymbol{x})$$

$$\bar{S}_d^{(i)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{c \in C^{(i)}} \psi^{(i)}\left((D_c^i \boldsymbol{x}, D_{c-i}^i \boldsymbol{x})\right)$$

$$\psi^{(i)}(t_1,t_2) = \inf_{b_c^i \in \mathbb{R}} \{b_c^i t_1^2 + \gamma^{(i)}(b_c^i, t_2)\}$$

$$\gamma^{(i)}(b,t) = \beta^{(i)}(b) + \rho(b,\mu(t)).$$

Energia Duale

$$E_d(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i{}^2 \bar{S}_d^{(i)}(\boldsymbol{x})$$

$$\bar{S}_d^{(i)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{c \in C^{(i)}} \psi^{(i)} \left((D_c^i \boldsymbol{x}, D_{c-i}^i \boldsymbol{x}) \right)$$

$$\psi^{(i)}(t_1, t_2) = \inf_{b_c^i \in \mathbb{R}} \{ b_c^i t_1^2 + \gamma^{(i)}(b_c^i, t_2) \}$$

$$\gamma^{(i)}(b,t) = \beta^{(i)}(b) + \rho(b, \mu(t)).$$

$\psi^{(i)}$ funzioni di interazione

Caso Booleano

$$b_c \in B = \{0, 1\} \qquad \beta(b) = \kappa(1 - b)$$

$$\rho(b_1, b_2) = \varepsilon(1 - b_1)(1 - b_2)$$

$$\psi(t_1, t_2) = \begin{cases} \begin{cases} {t_1}^2, & |t_1| < \kappa \\ \kappa^2, & |t_1| \geq \kappa, \end{cases} & |t_2| < \kappa \\ \begin{cases} {t_1}^2, & |t_1| < \kappa^* \\ (\kappa^*)^2, & |t_1| \geq \kappa^*, \end{cases} & |t_2| \geq \kappa, \end{cases}$$

κ^* soprasoglia di discontinuità

$$\boxed{B,\, \beta,\, \rho} \qquad \overset{?}{\Longleftrightarrow} \qquad \boxed{\psi}$$

B insieme dei valori di una variabile di linea
β funzione peso delle variabili di linea nell'energia primale
ρ funzione che rappresenta le interazioni tra le variabili di linea nell'energia primale
ψ funzione di interazione nell'energia duale

Teorema di dualità

Teorema [Gerace, M. e Pucci]

Sia $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

I) $\psi(0,\cdot) = 0$, $\psi(t_1,\cdot) \not\equiv 0$, $\psi(t_1,\cdot)$ è una funzione pari, continua non decrescente in $\mathbb{R}_0^+$;

II) la funzione $\phi(t_1,t_2) = \begin{cases} \psi(\sqrt{t_1},t_2), & \text{se } t_1 \geq 0 \\ -\infty, & \text{altrimenti} \end{cases}$ è concava $\forall t_2 \in \mathbb{R}$.

III) $\phi(\cdot,t_2)$ sia pari, continua e non decrescente in $\mathbb{R}_0^+$;

Teorema [Gerace, M. e Pucci]

Sia $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

I) $\psi(0, \cdot) = 0$, $\psi(t_1, \cdot) \not\equiv 0$, $\psi(t_1, \cdot)$ è una funzione pari, continua non decrescente in $\mathbb{R}_0^+$;

II) la funzione $\phi(t_1, t_2) = \begin{cases} \psi(\sqrt{t_1}, t_2), & \text{se } t_1 \geq 0 \\ -\infty, & \text{altrimenti} \end{cases}$ è concava $\forall t_2 \in \mathbb{R}$.

III) $\phi(\cdot, t_2)$ sia pari, continua e non decrescente in $\mathbb{R}_0^+$;

Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \cup +\infty$ tale che

IV) $\psi(t_1, t_2) = \inf_{b \in \mathbb{R}} \{bt_1^2 + \gamma(b, t_2)\} \quad \forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

V) $\gamma(b, \cdot) \not\equiv 0$, $\gamma(b, \cdot) \geq 0 \quad \forall b \in \mathbb{R}$, β è non crescente e convessa;

VI) se $b \neq 0$, $\gamma(b, \cdot) < +\infty$ se e soltanto se $b > 0$;

VII) $\lim_{b \to +\infty} \gamma(b, \cdot) = 0$, $\lim_{b \to 0^+} \gamma(b, \cdot) = \gamma(0, \cdot) > 0$.

VIII) $\gamma(\cdot, t_2)$ è pari, continua e non decrescente in $\mathbb{R}_0^+$.

TEOREMA [GERACE, M. E PUCCI]

$$\begin{array}{ccc} & & \text{IV)} \\ \text{I)} & & \text{V)} \\ \text{II)} & \Longleftrightarrow & \text{VI)} \\ \text{III)} & & \text{VII)} \\ & & \text{VIII)} \end{array}$$

ALGORITMO GNC (GRADUATED NON–CONVEXITY)

Si determina una famiglia $\{E_d^{(p)}\}_p$ di funzioni che approssimano E_d, in modo tale che la prima sia convessa e l'ultima coincida con E_d.

Algoritmo GNC (Graduated Non–Convexity)

Si determina una famiglia $\{E_d^{(p)}\}_p$ di funzioni che approssimano E_d, in modo tale che la prima sia convessa e l'ultima coincida con E_d.

Richiesta

Ogni funzione approssimante $E_d^{(p)}$ verifica le ipotesi del Teorema di Dualità

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}$$

A effetto di sfocatura dell'immagine
$\boldsymbol{y}$ immagine osservata
$\boldsymbol{n}$ rumore che corrompe l'immagine
$\boldsymbol{x}$ immagine originale

Restauro di Immagini Sfuocate

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}$$

A effetto di sfocatura dell'immagine
$\boldsymbol{y}$ immagine osservata
$\boldsymbol{n}$ rumore che corrompe l'immagine
$\boldsymbol{x}$ immagine originale

Immagine originale

Immagine osservata

ENERGIA DUALE

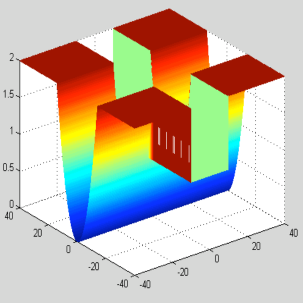
$$E_d(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \lambda^2 \bar{S}_d(\boldsymbol{x})$$

$$\bar{S}_d(\boldsymbol{x}) = \sum_{c \in C} \psi\left(\left(D_c^1 \boldsymbol{x}, D_{c-1}^1 \boldsymbol{x}\right)\right)$$

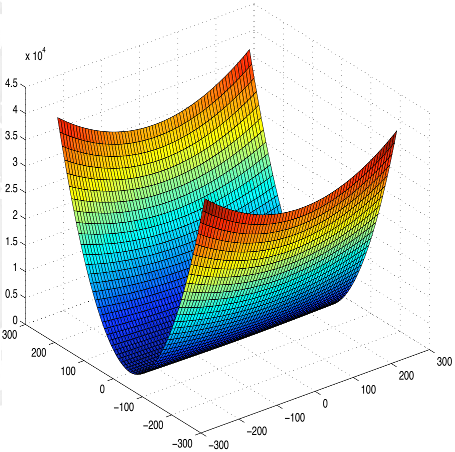
ENERGIA DUALE

$$E_d(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \lambda^2 \bar{S}_d(\boldsymbol{x})$$

$$\bar{S}_d(\boldsymbol{x}) = \sum_{c\in C} \psi\left(\left(D_c^1\boldsymbol{x}, D_{c-1}^1\boldsymbol{x}\right)\right)$$



Prima approssimazione convessa



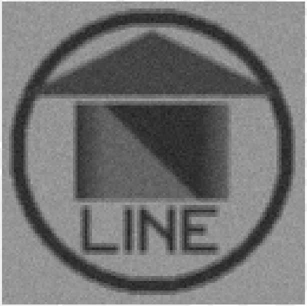


Immagine Osservata

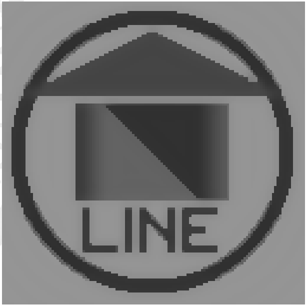


Immagine Stimata

RISULTATI SPERIMENTALI

Immagine Osservata

Immagine Stimata

Immagine Osservata

Immagine Stimata

Grazie