Giornate di Algebra Lineare Numerica e Applicazioni

ELABORAZIONE DIGITALE DI IMMAGINI A COLORI

Ivan Gerace, Francesca Martinelli e Alfredo Milani

Perugia, 17 febbraio 2009

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Perugia

La Luce

La luce è una forma di energia raggiante che si propaga nell'aria e nel vuoto sotto forma di onda elettromagnetica.

La Luce

La luce è una forma di energia raggiante che si propaga nell'aria e nel vuoto sotto forma di onda elettromagnetica.

Esistono diversi tipi di onde elettromagnetiche (onde radio, raggi infrarossi, ultravioletti, ecc...) ma la luce si diversifica da queste per il fatto di essere percepita dall'occhio umano.

Ma cosa c'è di fisicamente diverso tra le radiazioni visibili e tutte le altre?

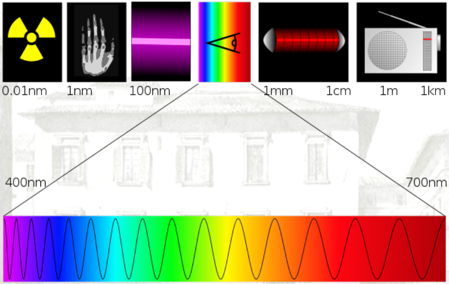
La Luce

La luce è una forma di energia raggiante che si propaga nell'aria e nel vuoto sotto forma di onda elettromagnetica.

Esistono diversi tipi di onde elettromagnetiche (onde radio, raggi infrarossi, ultravioletti, ecc...) ma la luce si diversifica da queste per il fatto di essere percepita dall'occhio umano.

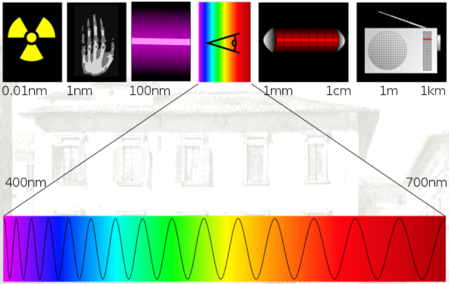
Ma cosa c'è di fisicamente diverso tra le radiazioni visibili e tutte le altre?
La lunghezza d'onda.

I Colori



L'occhio umano è sensibile ad una porzione assai piccola dell'intero spettro delle onde elettromagnetiche (tra i 380 e i 760 nm).

I Colori



L'occhio umano è sensibile ad una porzione assai piccola dell'intero spettro delle onde elettromagnetiche (tra i 380 e i 760 nm).

Quando ci si limita a tale regione, ogni variazione di lunghezza d'onda al nostro occhio appare come una variazione di colore.

La Rifrazione

La luce bianca contiene contemporaneamente tutte le lunghezze d'onda che il nostro occhio può vedere. Quando passa attraverso un prisma si scinde in tutte le sue componenti cromatiche.

La Rifrazione

La luce bianca contiene contemporaneamente tutte le lunghezze d'onda che il nostro occhio può vedere. Quando passa attraverso un prisma si scinde in tutte le sue componenti cromatiche.

Ogni colore subisce una deviazione della propria direzione propagazione proporzionale alla sua lunghezza d'onda.

Percezione dei Colori

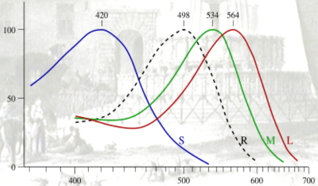
Le cellule nervose che nell'occhio permettono la percezione della luce sono dette coni (per la visione in condizioni di forte esposizione alla luce) e bastoncelli (per la visione in condizioni di bassa esposizione alla luce).

PERCEZIONE DEI COLORI

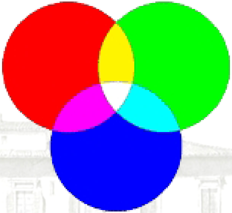
Le cellule nervose che nell'occhio permettono la percezione della luce sono dette coni (per la visione in condizioni di forte esposizione alla luce) e bastoncelli (per la visione in condizioni di bassa esposizione alla luce).

Esistono tre tipi di coni:

- il primo è più sensibile al rosso;
- il secondo è più sensibile al verde;
- il terzo è più sensibile al blu.



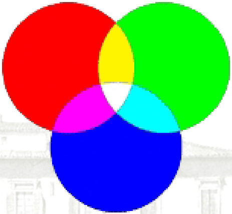
Sintesi Additiva



Sintesi additiva

La percezione dei colori è data da una sintesi additiva di rosso, verde e blu.

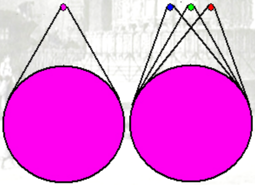
SINTESI ADDITIVA



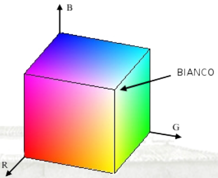
Sintesi additiva

La percezione dei colori è data da una sintesi additiva di rosso, verde e blu.

Esperimenti di David Wright and John Guild:

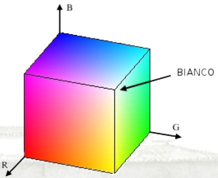


SPAZIO RGB

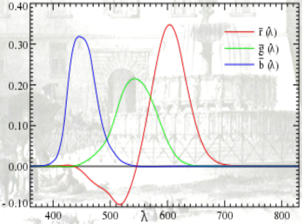


Le tre coordinate di colore possono essere disposte su tre assi ottenendo così un modello tridimensionale. L'insieme dei colori rappresentabili è detto gamut.

Spazio RGB



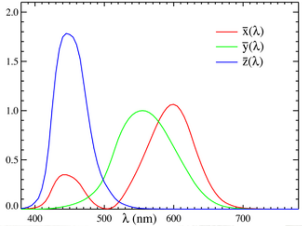
Le tre coordinate di colore possono essere disposte su tre assi ottenendo così un modello tridimensionale. L'insieme dei colori rappresentabili è detto gamut.



Funzione di accoppiamento dei colori

SPAZIO XYZ

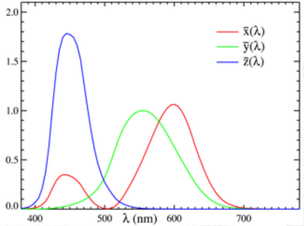
Esperimenti della CIE (Commission International d'Eclairage):



Funzione di accoppiamento dei colori

Spazio XYZ

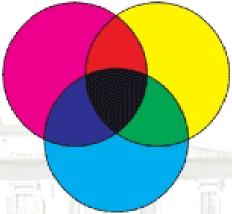
Esperimenti della CIE (Commission International d'Eclairage):



Funzione di accoppiamento dei colori

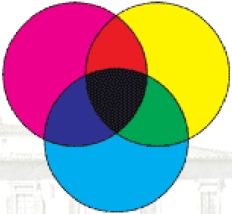
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4900 & 0.3100 & 0.2000 \\ 0.1770 & 0.8124 & 0.0106 \\ 0 & 0.0100 & 0.9900 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$$

Sintesi Sottrattiva



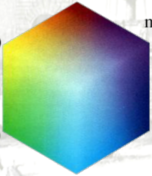
Sintesi sottrattiva

SINTESI SOTTRATTIVA



Sintesi sottrattiva

Spazio CMY:



SINTESI SOTTRATTIVA

Il colore di un oggetto è frutto invece di una sintesi sottrattiva: ogni oggetto assorbe determinate lunghezze d'onda della luce e ne riflette delle altre.

Sintesi Sottrattiva

Il colore di un oggetto è frutto invece di una sintesi sottrattiva: ogni oggetto assorbe determinate lunghezze d'onda della luce e ne riflette delle altre.

La mela ci appare gialla perchè la sua buccia assorbe la radiazione blu e riflette quella rossa e quella verde.

bianco - blu = rosso + verde = giallo

Sintesi Sottrattiva

Il colore di un oggetto è frutto invece di una sintesi sottrattiva: ogni oggetto assorbe determinate lunghezze d'onda della luce e ne riflette delle altre.

La mela ci appare rossa perchè la sua buccia assorbe la radiazione blu e la radiazione verde e riflette quella rossa.

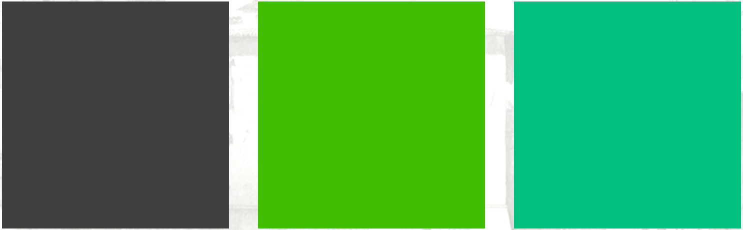
bianco - (blu + verde) = rosso

Uniformità di un Spazio di Colore

Un spazio di colore è detto uniforme se colori vicini corrispondono a colori simili all'occhio umano.

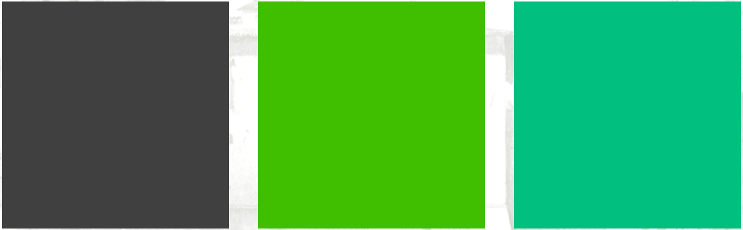
Uniformità di un Spazio di Colore

Un spazio di colore è detto uniforme se colori vicini corrispondono a colori simili all'occhio umano.



Uniformità di un Spazio di Colore

Un spazio di colore è detto uniforme se colori vicini corrispondono a colori simili all'occhio umano.



$$\begin{pmatrix} 64 \\ 64 \\ 64 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 64 \\ 191 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 191 \\ 127 \end{pmatrix}$$

Caratterizzazione del Colore

Una sensazione cromatica può essere descritta anche senza utilizzare una somma o una sottrazione di colori primari.

Caratterizzazione del Colore

Una sensazione cromatica può essere descritta anche senza utilizzare una somma o una sottrazione di colori primari.

Ogni colore è caratterizzato infatti da due fattori principali:

1. luminanza: esprime l'intensità della luce e caratterizza quindi la brillantezza dell'immagine;

Caratterizzazione del Colore

Una sensazione cromatica può essere descritta anche senza utilizzare una somma o una sottrazione di colori primari.

Ogni colore è caratterizzato infatti da due fattori principali:

1. luminanza: esprime l'intensità della luce e caratterizza quindi la brillantezza dell'immagine;
2. crominanza:
   - tinta: indica un colore puro, cioè caratterizzato da una singola lunghezza d'onda;

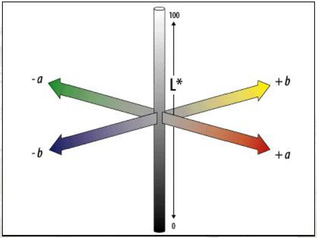
Caratterizzazione del Colore

Una sensazione cromatica può essere descritta anche senza utilizzare una somma o una sottrazione di colori primari.

Ogni colore è caratterizzato infatti da due fattori principali:

1. luminanza: esprime l'intensità della luce e caratterizza quindi la brillantezza dell'immagine;
2. crominanza:
   - tinta: indica un colore puro, cioè caratterizzato da una singola lunghezza d'onda;
   - saturazione: indica la quantità di tinta rispetto al grigio acromatico.

Spazio L*a*b



Assi dello spazio L*a*b

Modellizzazione di Immagini a Colori

Sia

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^{(r)} \\ \boldsymbol{x}^{(g)} \\ \boldsymbol{x}^{(b)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m},$$

un immagine a colori dove $\boldsymbol{x}^{(r)}, \boldsymbol{x}^{(g)}, \boldsymbol{x}^{(b)} \in \mathbb{R}^{n \cdot m}$ sono rispettivamente il canale rosso,verde e blu in notazione lessicografica.

Distorsione di Immagini a Colori

La distorsione di una immagine a colori può essere così modellizzata

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n},$$

dove

Distorsione di Immagini a Colori

La distorsione di una immagine a colori può essere così modellizzata

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n},$$

dove

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ è l'immagine a colori ideale;

Distorsione di Immagini a Colori

La distorsione di una immagine a colori può essere così modellizzata

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n},$$

dove

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ è l'immagine a colori ideale;

$\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ è il rumore su ogni componente che viene assunto essere Gaussiano, bianco indipendente con media nulla e varianza data σ^2;

Distorsione di Immagini a Colori

La distorsione di una immagine a colori può essere così modellizzata

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n},$$

dove

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ è l'immagine a colori ideale;

$\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ è il rumore su ogni componente che viene assunto essere Gaussiano, bianco indipendente con media nulla e varianza data σ^2;

$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ l'immagine mosaicata;

Distorsione di Immagini a Colori

La distorsione di una immagine a colori può essere così modellizzata

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n},$$

dove

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ è l'immagine a colori ideale;

$\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ è il rumore su ogni componente che viene assunto essere Gaussiano, bianco indipendente con media nulla e varianza data σ^2;

$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ l'immagine mosaicata;

$A \in \mathbb{R}^{(3n \cdot m) \times (3n \cdot m)}$ è un operatore lineare che è strutturato come segue:

Distorsione di Immagini a Colori

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{pmatrix}$$

dove $A_{i,j} \in \mathbb{R}^{(n \cdot m)\times(n \cdot m)}$, con $i, j = 1, 2, 3$, sono matrici di sfocatura.

Distorsione di Immagini a Colori

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{pmatrix}$$

dove $A_{i,j} \in \mathbb{R}^{(n \cdot m) \times (n \cdot m)}$, con $i, j = 1, 2, 3$, sono matrici di sfocatura.

Immagine ideale

Distorsione di Immagini a Colori

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{pmatrix}$$

dove $A_{i,j} \in \mathbb{R}^{(n \cdot m) \times (n \cdot m)}$, con $i, j = 1, 2, 3$, sono matrici di sfocatura.

Immagine distorta

Distorsione di Immagini a Colori

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{pmatrix}$$

dove $A_{i,j} \in \mathbb{R}^{(n \cdot m) \times (n \cdot m)}$, con $i, j = 1, 2, 3$, sono matrici di sfocatura.

Immagine ideale

Distorsione di Immagini a Colori

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{pmatrix}$$

dove $A_{i,j} \in \mathbb{R}^{(n \cdot m) \times (n \cdot m)}$, con $i, j = 1, 2, 3$, sono matrici di sfocatura.

Immagine distorta

Soluzione Regolarizzata

La soluzione del problema inverso viene definita come l'argomento del minimo della seguente funzione energia duale

$$E_d(\boldsymbol{x}) = \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2 + {\lambda_k}^2 \sum_{c \in C_k} g^{(i)}\left(N_c^k \boldsymbol{x}\right),$$

dove $k = 1, 2, 3$

Soluzione Regolarizzata

La soluzione del problema inverso viene definita come l'argomento del minimo della seguente funzione energia duale

$$E_d(\boldsymbol{x}) = \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2 + {\lambda_k}^2 \sum_{c \in C_k} g^{(i)}\left(N_c^k \boldsymbol{x}\right),$$

dove $k = 1, 2, 3$ e

$$N_c^k \boldsymbol{x} = \left\| \begin{pmatrix} D_c^k \boldsymbol{x}^{(r)} & D_c^k \boldsymbol{x}^{(g)} & D_c^k \boldsymbol{x}^{(g)} \end{pmatrix}^T \right\|_2 .$$

Primo ordine:

Immagine osservata

Risultati Sperimentali

Primo ordine:

Immagine ricostruita

Risultati Sperimentali

Primo ordine:

Immagine osservata

RISULTATI SPERIMENTALI

Primo ordine:

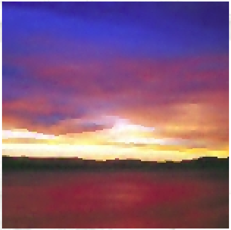


Immagine ricostruita

RISULTATI SPERIMENTALI

Primo ordine:

Immagine osservata

Risultati Sperimentali

Primo ordine:

Immagine ricostruita

RISULTATI SPERIMENTALI

Secondo ordine:

Immagine osservata

Risultati Sperimentali

Secondo ordine:

Immagine ricostruita

Risultati Sperimentali

Secondo ordine:

Immagine osservata

RISULTATI SPERIMENTALI

Secondo ordine:

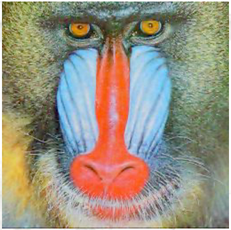


Immagine ricostruita

Stima dei Parametri

Si stimano (λ, κ) tali che:

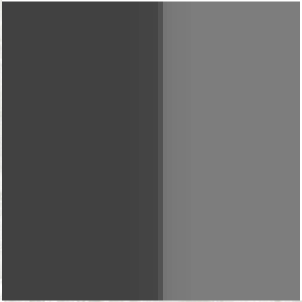
1. l'immagine ricostruita sia planare a tratti e senza tripli bordi;

Stima dei Parametri

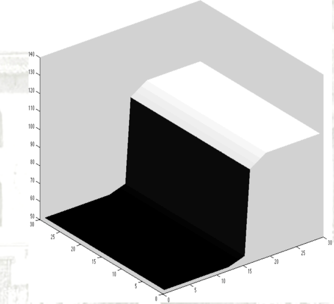
Si stimano (λ, κ) tali che:

1. l'immagine ricostruita sia planare a tratti e senza tripli bordi;
2. il rumore stimato abbia una varianza pari ad una valore σ^2 fissato.

Esempio 1



Livelli di grigio



Superficie

Esempio 1

$$
\begin{array}{cccccccc}
50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106 \\
50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106 \\
50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106 \\
50 & 51 & 52 & \mathbf{53} & \mathbf{100} & \mathbf{102} & 104 & 106. \\
50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106 \\
50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106 \\
50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106
\end{array}
$$

$$\tau = 10$$

$$|D_c^2 \boldsymbol{x}| \quad = \quad 45 > \tau,$$

Esempio 1

$$
\begin{array}{cccccccc}
50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106 \\
50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106 \\
50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106 \\
50 & 51 & \mathbf{52} & \mathbf{53} & \mathbf{100} & 102 & 104 & 106. \\
50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106 \\
50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106 \\
50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106
\end{array}
$$

$$\tau = 10$$

$$
\begin{aligned}
|D_c^2 \boldsymbol{x}| &= 45 > \tau, \\
|D_{c-1}^2 \boldsymbol{x}| &= 46 > \tau,
\end{aligned}
$$

Esempio 1

$$
\begin{array}{cccccccc}
50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106 \\
50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106 \\
50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106 \\
50 & 51 & 52 & 53 & \mathbf{100} & \mathbf{102} & \mathbf{104} & 106. \\
50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106 \\
50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106 \\
50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106
\end{array}
$$

$$\tau = 10$$

$$
\begin{aligned}
|D_c^2 \boldsymbol{x}| &= 45 > \tau, \\
|D_{c-1}^2 \boldsymbol{x}| &= 46 > \tau, \\
|D_{c+1}^2 \boldsymbol{x}| &= 0 < \tau.
\end{aligned}
$$

ESEMPIO 1

$$\begin{array}{cccccccc} 50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106 \\ 50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106 \\ 50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106 \\ 50 & 51 & 52 & 53 & \mathbf{100} & \mathbf{102} & \mathbf{104} & 106. \\ 50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106 \\ 50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106 \\ 50 & 51 & 52 & 53 & 100 & 102 & 104 & 106 \end{array}$$

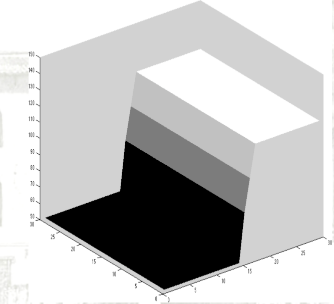
$$\tau = 10$$

$$\begin{aligned} |D_c^2 \boldsymbol{x}| &= 45 > \tau, \\ |D_{c-1}^2 \boldsymbol{x}| &= 46 > \tau, \\ |D_{c+1}^2 \boldsymbol{x}| &= 0 < \tau. \end{aligned}$$

L'immagine presenta doppi bordi ma non tripli bordi.

ESEMPIO 2

Livelli di grigio



Superficie

Esempio 2

$$\begin{array}{cccccccc}
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120 \\
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120 \\
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120 \\
50 & 50 & 50 & \mathbf{80} & \mathbf{100} & \mathbf{120} & 120 & 120. \\
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120 \\
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120 \\
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120
\end{array}$$

$$\tau = 10$$

$$|D_c^2 \boldsymbol{x}| \quad = \quad 100 > \tau,$$

Esempio 2

$$
\begin{array}{cccccccc}
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120 \\
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120 \\
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120 \\
50 & 50 & \mathbf{50} & \mathbf{80} & \mathbf{100} & 120 & 120 & 120. \\
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120 \\
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120 \\
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120
\end{array}
$$

$$\tau = 10$$

$$
\begin{aligned}
|D_c^2 \boldsymbol{x}| &= 100 > \tau, \\
|D_{c-1}^2 \boldsymbol{x}| &= 70 > \tau,
\end{aligned}
$$

Esempio 2

$$\begin{array}{cccccccc}
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120 \\
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120 \\
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120 \\
50 & 50 & 50 & 80 & \mathbf{100} & \mathbf{120} & \mathbf{120} & 120. \\
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120 \\
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120 \\
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120
\end{array}$$

$$\tau = 10$$

$$\begin{aligned}
|D_c^2 \boldsymbol{x}| &= 100 > \tau, \\
|D_{c-1}^2 \boldsymbol{x}| &= 70 > \tau, \\
|D_{c+1}^2 \boldsymbol{x}| &= 20 > \tau.
\end{aligned}$$

Esempio 2

$$
\begin{array}{cccccccc}
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120\\
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120\\
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120\\
50 & 50 & 50 & 80 & \mathbf{100} & \mathbf{120} & \mathbf{120} & 120.\\
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120\\
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120\\
50 & 50 & 50 & 80 & 100 & 120 & 120 & 120
\end{array}
$$

$$\tau = 10$$

$$
\begin{aligned}
|D_c^2 \boldsymbol{x}| &= 100 > \tau,\\
|D_{c-1}^2 \boldsymbol{x}| &= 70 > \tau,\\
|D_{c+1}^2 \boldsymbol{x}| &= 20 > \tau.
\end{aligned}
$$

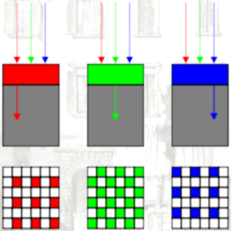
L'immagine presenta tripli bordi.

Acquisione tramite Fotocamere Digitali

Nelle maggior parte delle fotocamere digitali attualmente in commercio, l'acquisizione del colore avviene del seguente modo:

Acquisione tramite Fotocamere Digitali

Nelle maggior parte delle fotocamere digitali attualmente in commercio, l'acquisizione del colore avviene del seguente modo: esiste un fotodiodo per pixel, davanti ad ognuno di essi viene posizionato un filtro colorato.



Pattern di Bayer

La griglia di filtri più comunemente usata è quella proposta da Bayer:

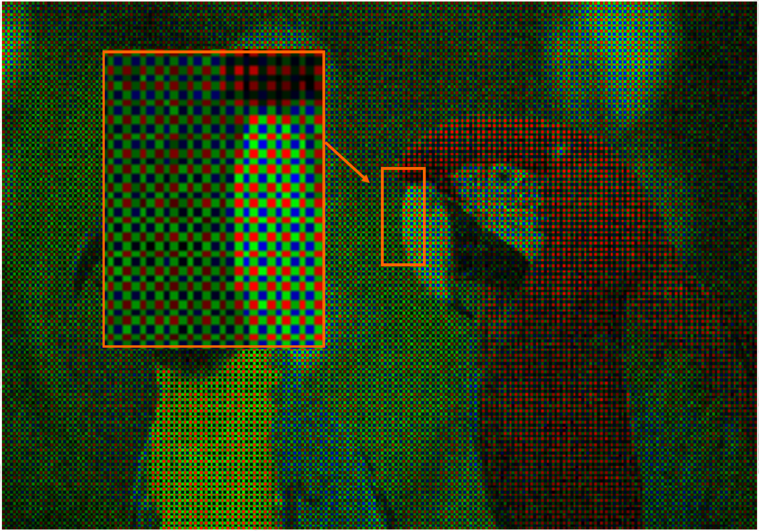
R_{00}	G_{01}	R_{02}	G_{03}	R_{04}	G_{05}	R_{06}
G_{10}	B_{11}	G_{12}	B_{13}	G_{14}	B_{15}	G_{16}
R_{20}	G_{21}	R_{22}	G_{23}	R_{24}	G_{25}	R_{26}
G_{30}	B_{31}	G_{32}	B_{33}	G_{34}	B_{35}	G_{36}
R_{40}	G_{41}	R_{42}	G_{43}	R_{44}	G_{45}	R_{46}
G_{50}	B_{51}	G_{52}	B_{53}	G_{54}	B_{55}	G_{56}
R_{60}	G_{61}	R_{62}	G_{63}	R_{64}	G_{65}	R_{66}

Mosaicizzazione

MOSAICIZZAZIONE

Mosaicizzazione

MOSAICIZZAZIONE



Mosaicizzazione

Il processo di mosaicizzazione di una immagine può essere così modellizzato

$$\boldsymbol{y} = M\ (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}),$$

dove

Mosaicizzazione

Il processo di mosaicizzazione di una immagine può essere così modellizzato

$$\boldsymbol{y} = M\,(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}),$$

dove

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ è l'immagine a colori ideale;

MOSAICIZZAZIONE

Il processo di mosaicizzazione di una immagine può essere così modellizzato

$$\boldsymbol{y} = M\ (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}),$$

dove

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ è l'immagine a colori ideale;

$\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ è il rumore su ogni componente che viene assunto essere Gaussiano, bianco indipendente con media nulla e varianza data σ^2;

MOSAICIZZAZIONE

Il processo di mosaicizzazione di una immagine può essere così modellizzato

$$\boldsymbol{y} = M\,(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}),$$

dove

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ è l'immagine a colori ideale;

$\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ è il rumore su ogni componente che viene assunto essere Gaussiano, bianco indipendente con media nulla e varianza data σ^2;

$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ l'immagine mosaicizzata;

Mosaicizzazione

Il processo di mosaicizzazione di una immagine può essere così modellizzato

$$\boldsymbol{y} = M\,(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}),$$

dove

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ è l'immagine a colori ideale;

$\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ è il rumore su ogni componente che viene assunto essere Gaussiano, bianco indipendente con media nulla e varianza data σ^2;

$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{3n \cdot m}$ l'immagine mosaicizzata;

$M \in \mathbb{R}^{(3n \cdot m) \times (3n \cdot m)}$ è un operatore lineare che è strutturato come segue:

Mosaicizzazione

$$M = \begin{pmatrix} M^{(r)} & O & O \\ O & M^{(g)} & O \\ O & O & M^{(b)} \end{pmatrix},$$

dove $O \in \mathbb{R}^{(n \cdot m) \times (n \cdot m)}$ è la matrice nulla, $M^{(r)}$, $M^{(g)}$ e $M^{(b)}$ sono matrici diagonali con

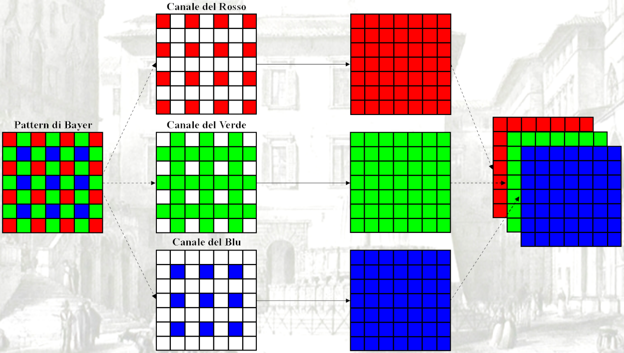
$$m^{(r)}_{(i,j)(i,j)} = \begin{cases} 1 & i \equiv_2 j \equiv_2 0 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$m^{(g)}_{(i,j)(i,j)} = \begin{cases} 1 & i \not\equiv_2 j \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$m^{(b)}_{(i,j)(i,j)} = \begin{cases} 1 & i \equiv_2 j \equiv_2 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Demosaicizzazione

L'operazione di interpolazione dei valori mancanti viene chiamata demosaicizzazione.



Filtro Bilineare

$$
x^{(b)}_{bilin\,(i,j)} = \begin{cases}
y^{(b)}_{(i,j)} & i \equiv_2 j \equiv_2 0 \\[2ex]
\dfrac{y^{(b)}_{(i,j-1)} + y^{(b)}_{(i,j+1)}}{2} & i \equiv_2 0 \;\&\; j \equiv_2 1 \\[2ex]
\dfrac{y^{(b)}_{(i-1,j)} + y^{(b)}_{(i-1,j)}}{2} & i \equiv_2 1 \;\&\; j \equiv_2 0 \\[2ex]
\dfrac{y^{(b)}_{(i-1,j-1)} + y^{(b)}_{(i+1,j-1)} + y^{(b)}_{(i-1,j+1)} + y^{(b)}_{(i+1,j-1)}}{4} & \text{altrimenti.}
\end{cases}
$$

Filtro Bilineare

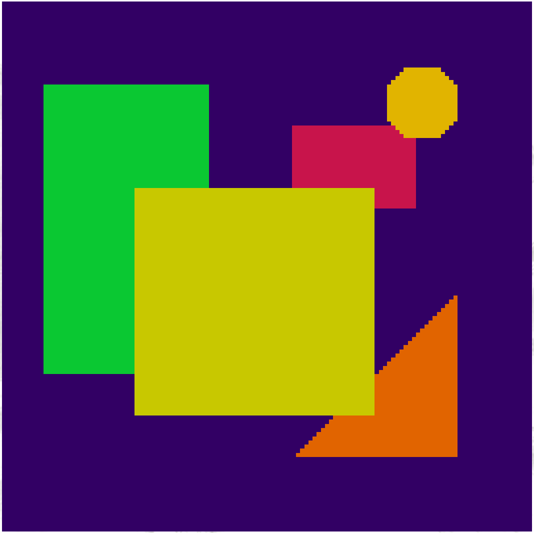


Immagine originale

Filtro Bilineare

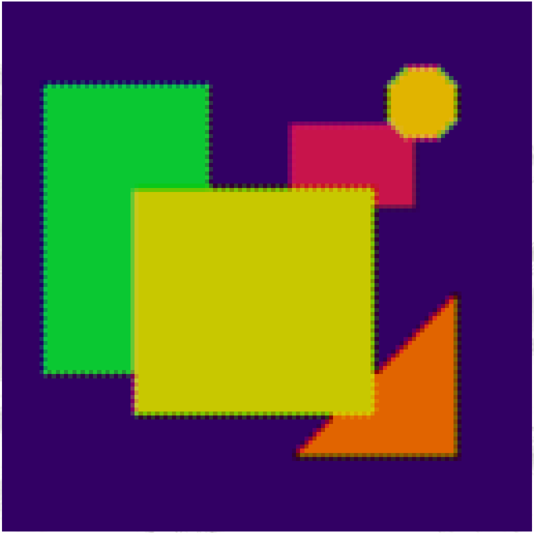


Immagine ricostruita

Algoritmo delle Proiezioni Alternate

Bahadir K. Gunturk, Yucel Altunbasak e Russell M. Mersereau (2002) utilizzano filtri bidimensionali costruiti a partire da un filtro passa-basso, $h_0 = (1 \quad 2 \quad 1)^T/4$, e un filtro passa-alto, $h_1 = (1 \quad -2 \quad 1)^T/4$, per scomporre una immagine nelle seguenti sottobande:

Algoritmo delle Proiezioni Alternate

Bahadir K. Gunturk, Yucel Altunbasak e Russell M. Mersereau (2002) utilizzano filtri bidimensionali costruiti a partire da un filtro passa-basso, $h_0 = (1 \quad 2 \quad 1)^T/4$, e un filtro passa-alto, $h_1 = (1 \quad -2 \quad 1)^T/4$, per scomporre una immagine nelle seguenti sottobande:

1. $F^{(1)}\boldsymbol{x}$, le righe sono filtrate mediate un filtro passa-basso mentre le colonne sono filtrate passa-alto;

Algoritmo delle Proiezioni Alternate

Bahadir K. Gunturk, Yucel Altunbasak e Russell M. Mersereau (2002) utilizzano filtri bidimensionali costruiti a partire da un filtro passa-basso, $h_0 = (1 \quad 2 \quad 1)^T/4$, e un filtro passa-alto, $h_1 = (1 \quad -2 \quad 1)^T/4$, per scomporre una immagine nelle seguenti sottobande:

1. $F^{(1)}\boldsymbol{x}$, le righe sono filtrate mediate un filtro passa-basso mentre le colonne sono filtrate passa-alto;
2. $F^{(2)}\boldsymbol{x}$, le righe sono filtrate mediate un filtro passa-alto mentre le colonne sono filtrate passa-basso;

Algoritmo delle Proiezioni Alternate

Bahadir K. Gunturk, Yucel Altunbasak e Russell M. Mersereau (2002) utilizzano filtri bidimensionali costruiti a partire da un filtro passa-basso, $h_0 = (1 \quad 2 \quad 1)^T/4$, e un filtro passa-alto, $h_1 = (1 \quad -2 \quad 1)^T/4$, per scomporre una immagine nelle seguenti sottobande:

1. $F^{(1)}\boldsymbol{x}$, le righe sono filtrate mediate un filtro passa-basso mentre le colonne sono filtrate passa-alto;
2. $F^{(2)}\boldsymbol{x}$, le righe sono filtrate mediate un filtro passa-alto mentre le colonne sono filtrate passa-basso;
3. $F^{(3)}\boldsymbol{x}$, sia righe che colonne sono filtrate mediate un filtro passa-alto.

Algoritmo delle Proiezioni Alternate

Gunturk et al. utilizzano due tipi vincoli:

1. uno relativo ai dati osservati,
2. l'altro basato sulla conoscenza della correlazione intercanale.

Algoritmo delle Proiezioni Alternate

Siano $\Lambda^{(r)}$, $\Lambda^{(g)}$ e $\Lambda^{(b)}$ gli insiemi delle coordinate dove sono campionati rispettivamente i canali rosso, verde e blu.

Algoritmo delle Proiezioni Alternate

Siano $\Lambda^{(r)}$, $\Lambda^{(g)}$ e $\Lambda^{(b)}$ gli insiemi delle coordinate dove sono campionati rispettivamente i canali rosso, verde e blu.

L'insieme delle immagini che rispetta il vincolo della consistenza con i dati è dato da

$$V_c = \{x : x^{(s)}(i,j) = y^{(s)}(i,j) \quad \forall (i,j) \in \Lambda^{(s)}, s = r, g, b\}.$$

ALGORITMO DELLE PROIEZIONI ALTERNATE

L'insieme delle immagini che rispetta i vincoli di dettaglio è dato da

$$V_d = \left\{ x : |(F^{(k)}\boldsymbol{x}^{(s)})(i,j) - (F^{(k)}\boldsymbol{x}^{(g)})(i,j)| \leq \tau \, \forall (i,j) \text{ per } k = 1,2,3 \text{ e } s = r,b \right\}$$

dove τ è la soglia positiva.

Algoritmo delle Proiezioni Alternate

L'insieme delle immagini che rispetta i vincoli di dettaglio è dato da

$$V_d = \left\{ x : |(F^{(k)}\boldsymbol{x}^{(s)})(i,j) - (F^{(k)}\boldsymbol{x}^{(g)})(i,j)| \leq \tau \, \forall (i,j) \text{ per } k = 1,2,3 \text{ e } s = r,b \right\}$$

dove τ è la soglia positiva.

Algoritmo

L'algoritmo delle proiezioni alternate è dato dalla proiezione alternata della stima $\boldsymbol{x}$ nei due insiemi V_c e V_d fino a convergenza della soluzione.

Metodi dei Minimi Quadrati Totali

Kiego Hirakawa e Thomas W. Parks (2006) propongono di determinare un filtro che si tale che utilizzato per determinare dei dati esistenti dia il risultato corretto.

Metodi dei Minimi Quadrati Totali

Kiego Hirakawa e Thomas W. Parks (2006) propongono di determinare un filtro che si tale che utilizzato per determinare dei dati esistenti dia il risultato corretto.

Questo può essere fatto tramite un metodo dei minimi quadrati dove i vettori di base sono composti da sottocampionamenti dei dati $\{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m\}$.

Metodi dei Minimi Quadrati Totali

Kiego Hirakawa e Thomas W. Parks (2006) propongono di determinare un filtro che si tale che utilizzato per determinare dei dati esistenti dia il risultato corretto.

Questo può essere fatto tramite un metodo dei minimi quadrati dove i vettori di base sono composti da sottocampionamenti dei dati $\{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m\}$.

Hirakwa e Parks propongono invece di utilizzare un metodo dei minimi quadrati totali capace di gestire errori presenti anche sui vettori di base.

Rappresentazione Sparsa della Soluzione

Julien Mairal, Micheal Elad e Guillermo Sapiro (2008) propongono di utilizzare un metodo a rappresentazione sparsa della soluzione.

Rappresentazione Sparsa della Soluzione

Julien Mairal, Micheal Elad e Guillermo Sapiro (2008) propongono di utilizzare un metodo a rappresentazione sparsa della soluzione.

In particolare la soluzione viene definita come il minimo della seguente funzione energia

$$E_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, D) = \|M(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\| + \sum_{i,j} \lambda_{i,j}^2 \|\boldsymbol{v}_{i,j}\|_0 + \sum_{i,j} \lambda_0^2 \|D\boldsymbol{v}_{i,j} - R_{i,j}\boldsymbol{x}\|_2^2,$$

Rappresentazione Sparsa della Soluzione

Julien Mairal, Micheal Elad e Guillermo Sapiro (2008) propongono di utilizzare un metodo a rappresentazione sparsa della soluzione.

In particolare la soluzione viene definita come il minimo della seguente funzione energia

$$E_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, D) = \|M(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\| + \sum_{i,j} \lambda_{i,j}^2 \|\boldsymbol{v}_{i,j}\|_0 + \sum_{i,j} \lambda_0^2 \|D\boldsymbol{v}_{i,j} - R_{i,j}\boldsymbol{x}\|_2^2,$$

dove
$D \in \mathbb{R}^{3t \times h}$ è il dizionario;

Rappresentazione Sparsa della Soluzione

Julien Mairal, Micheal Elad e Guillermo Sapiro (2008) propongono di utilizzare un metodo a rappresentazione sparsa della soluzione.

In particolare la soluzione viene definita come il minimo della seguente funzione energia

$$E_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, D) = \|M(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\| + \sum_{i,j} \lambda_{i,j}^2 \|\boldsymbol{v}_{i,j}\|_0 + \sum_{i,j} \lambda_0^2 \|D\boldsymbol{v}_{i,j} - R_{i,j}\boldsymbol{x}\|_2^2,$$

dove
$D \in \mathbb{R}^{3t \times h}$ è il dizionario;
$\boldsymbol{v}_{i,j} \in \mathbb{R}^h$ sono i coefficienti lineari della rappresentazione della sottoimmagine che inizia dal pixel (i,j);

Rappresentazione Sparsa della Soluzione

Julien Mairal, Micheal Elad e Guillermo Sapiro (2008) propongono di utilizzare un metodo a rappresentazione sparsa della soluzione.

In particolare la soluzione viene definita come il minimo della seguente funzione energia

$$E_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, D) = \|M(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\| + \sum_{i,j} \lambda_{i,j}^2 \|\boldsymbol{v}_{i,j}\|_0 + \sum_{i,j} \lambda_0^2 \|D\boldsymbol{v}_{i,j} - R_{i,j}\boldsymbol{x}\|_2^2,$$

dove
$D \in \mathbb{R}^{3t \times h}$ è il dizionario;
$\boldsymbol{v}_{i,j} \in \mathbb{R}^h$ sono i coefficienti lineari della rappresentazione della sottoimmagine che inizia dal pixel (i,j);
$R_{i,j} \in \{0,1\}^{3t \times 3(n \cdot m)}$ è l'operatore di proiezione nella sottoimmagine che inizia dal pixel (i,j).

VINCOLO SULLE DERIVATE

VINCOLO SULLE DERIVATE

VINCOLO SULLE DERIVATE

Operatore usato

$$V_c^k \boldsymbol{x} = \left\| \begin{pmatrix} D_c^k \boldsymbol{x}^{(r)} - D_c^k \boldsymbol{x}^{(g)} & D_c^k \boldsymbol{x}^{(r)} - D_c^k \boldsymbol{x}^{(b)} & D_c^k \boldsymbol{x}^{(g)} - D_c^k \boldsymbol{x}^{(b)} \end{pmatrix}^T \right\|,$$

con $k = 1, 2, 3$.

Metodo Proposto

Viene minimizzata la seguente funzione energia

$$E_d(\boldsymbol{x}) = \|M(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\|_2^2 + \sum_{k=1}^{3} \lambda_k{}^2 \sum_{c\in C_k} g^{(i)}\left(N_c^k\boldsymbol{x}\right) + \sum_{k=1}^{3} \bar{\lambda}_k^2 \sum_{c\in C_k} g^{(i)}\left(V_c^k\boldsymbol{x}\right).$$

Algoritmo GNC

L'uso di algoritmo Graduated Non-Convex (GNC) prevede la costruzione di una famiglia di funzioni energia $\{E_d^{(p)}\}_{p=2,\dots,\bar{p}}$.

Algoritmo GNC

L'uso di algoritmo Graduated Non-Convex (GNC) prevede la costruzione di una famiglia di funzioni energia $\{E_d^{(p)}\}_{p=2,\ldots,\bar{p}}$.

La funzione energia $E_d^{(0)}$ corrisponde all'uso di variabili di linea booleane.

Una scelta $\bar{p} > 0$ permette avere un effetto di anti–aliasing sulle discontinuità.

Insieme Campione della Kodak

Insieme Campione della Kodak

Insieme Campione della Kodak

Insieme Campione della Kodak

Insieme Campione della Kodak

Insieme Campione della Kodak

IMMAGINE REALE

RISULTATO

Risultato con rumore ($\sigma = 8$)

Risultato con rumore ($\sigma = 16$)

Risultati Sperimentali

Immagine

01
02
03
04
05
06
07
08
09
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24

Risultati Sperimentali

Immagine	Bilineare
01	157.106018
02	30.685131
03	23.592515
04	28.136531
05	145.381528
06	110.227843
07	31.228872
08	286.249229
09	37.85389
10	37.739314
11	77.673620
12	32.62827
13	261.113462
14	77.388559
15	44.393178
16	47.682909
17	40.551081
18	102.702519
19	101.627409
20	44.685173
21	91.405136
22	58.038699
23	21.313678
24	139.0826

Risultati Sperimentali

Immagine	Bilineare	Gunturk
01	157.106018	11.0390
02	30.685131	7.8127
03	23.592515	4.6355
04	28.136531	6.5894
05	145.381528	11.4887
06	110.227843	10.6874
07	31.228872	4.5422
08	286.249229	19.9887
09	37.85389	4.3044
10	37.739314	4.3415
11	77.673620	7.5903
12	32.62827	4.7973
13	261.113462	24.3807
14	77.388559	16.4151
15	44.393178	8.7229
16	47.682909	4.2336
17	40.551081	4.8974
18	102.702519	13.2394
19	101.627409	6.8327
20	44.685173	5.7976
21	91.405136	8.3682
22	58.038699	10.3306
23	21.313678	4.0680
24	139.0826	22.8398

Risultati Sperimentali

Immagine	Bilineare	Gunturk	Hirakawa
01	157.106018	11.0390	11644
02	30.685131	7.8127	14482
03	23.592515	4.6355	158.0610
04	28.136531	6.5894	34.5066
05	145.381528	11.4887	3344.4
06	110.227843	10.6874	66.3163
07	31.228872	4.5422	18.6491
08	286.249229	19.9887	461.5054
09	37.85389	4.3044	23.8019
10	37.739314	4.3415	35.1371
11	77.673620	7.5903	74.0938
12	32.62827	4.7973	60.2488
13	261.113462	24.3807	101.3877
14	77.388559	16.4151	51.7379
15	44.393178	8.7229	$1.3699 \cdot 10^{22}$
16	47.682909	4.2336	38.2178
17	40.551081	4.8974	20.1011
18	102.702519	13.2394	48.6763
19	101.627409	6.8327	40.9361
20	44.685173	5.7976	999.0677
21	91.405136	8.3682	70.2223
22	58.038699	10.3306	7989.6
23	21.313678	4.0680	11.0043
24	139.0826	22.8398	45.3241

Risultati Sperimentali

Immagine	Bilineare	Gunturk	Hirakawa	Mairal
01	157.106018	11.0390	11644	7.5176
02	30.685131	7.8127	14482	5.5218
03	23.592515	4.6355	158.0610	3.1195
04	28.136531	6.5894	34.5066	4.8315
05	145.381528	11.4887	3344.4	8.7716
06	110.227843	10.6874	66.3163	6.4281
07	31.228872	4.5422	18.6491	3.38
08	286.249229	19.9887	461.5054	14.82
09	37.85389	4.3044	23.8019	3.0555
10	37.739314	4.3415	35.1371	3.4920
11	77.673620	7.5903	74.0938	6.1813
12	32.62827	4.7973	60.2488	2.8846
13	261.113462	24.3807	101.3877	19.2345
14	77.388559	16.4151	51.7379	10.4251
15	44.393178	8.7229	$1.3699 \cdot 10^{22}$	6.1956
16	47.682909	4.2336	38.2178	2.8254
17	40.551081	4.8974	20.1011	**4.0934**
18	102.702519	13.2394	48.6763	11.6434
19	101.627409	6.8327	40.9361	**4.8538**
20	44.685173	5.7976	999.0677	5.1651
21	91.405136	8.3682	70.2223	6.9037
22	58.038699	10.3306	7989.6	**8.4349**
23	21.313678	4.0680	11.0043	3.7332
24	139.0826	22.8398	45.3241	**17.7861**

Risultati Sperimentali

Immagine	Bilineare	Gunturk	Hirakawa	Mairal	Regolarizzazione
01	157.106018	11.0390	11644	7.5176	**5.4548**
02	30.685131	7.8127	14482	5.5218	**5.2138**
03	23.592515	4.6355	158.0610	3.1195	**2.9665**
04	28.136531	6.5894	34.5066	4.8315	**4.1597**
05	145.381528	11.4887	3344.4	8.7716	**8.1094**
06	110.227843	10.6874	66.3163	6.4281	**6.0692**
07	31.228872	4.5422	18.6491	3.38	**2.7626**
08	286.249229	19.9887	461.5054	14.82	**12.059**
09	37.85389	4.3044	23.8019	3.0555	**2.9818**
10	37.739314	4.3415	35.1371	3.4920	**3.4105**
11	77.673620	7.5903	74.0938	6.1813	**5.6544**
12	32.62827	4.7973	60.2488	2.8846	**2.3051**
13	261.113462	24.3807	101.3877	19.2345	**15.0997**
14	77.388559	16.4151	51.7379	10.4251	**9.4770**
15	44.393178	8.7229	$1.3699 \cdot 10^{22}$	6.1956	**5.8636**
16	47.682909	4.2336	38.2178	2.8254	**2.6824**
17	40.551081	4.8974	20.1011	**4.0934**	4.4585
18	102.702519	13.2394	48.6763	11.6434	**11.4875**
19	101.627409	6.8327	40.9361	**4.8538**	4.9374
20	44.685173	5.7976	999.0677	5.1651	**4.4028**
21	91.405136	8.3682	70.2223	6.9037	**6.0699**
22	58.038699	10.3306	7989.6	**8.4349**	9.0257
23	21.313678	4.0680	11.0043	3.7332	**2.5948**
24	139.0826	22.8398	45.3241	**17.7861**	21.1364

Risultati Sperimentali con rumore $\sigma = 8$

Immagine	Bilineare	Gunturk	Hirakawa	Regolarizzazione
01	192.0752	70.1323	1900.2	**56.4352**
02	65.8024	66.3323	97.2100	**30.1425**
03	58.8424	62.5676	79.1727	**24.5673**
04	63.0044	65.1244	92.5160	**28.9303**
05	175.2133	69.136	133.6806	**49.3065**
06	146.8450	66.6520	111.0670	**45.4179**
07	65.5241	62.9707	93.7552	**24.4626**
08	315.2942	77.3570	424.2114	**59.8981**
09	72.7290	63.1827	84.1960	**25.9646**
10	72.5008	62.8351	85.2882	**26.2809**
11	112.7873	65.9030	105.6042	**38.5765**
12	67.7498	61.8407	83.0594	**26.5836**
13	301.3486	81.2425	180.0687	**76.0216**
14	111.8682	75.0172	122.9026	**53.0372**
15	77.8791	62.8039	89.9631	**29.8338**
16	84.5402	63.5739	88.0577	**33.3221**
17	75.2069	61.8072	87.5196	**27.6590**
18	137.7670	70.2534	119.6165	**46.5700**
19	135.6519	65.6939	118.9659	**37.2511**
20	75.2994	52.8946	71.1301	**28.4170**
21	127.6865	66.6655	114.1499	**38.9636**
22	92.8301	69.1720	108.6866	**40.0437**
23	55.6508	62.18887	74.9557	**20.4881**
24	51.2720	59.2745	65.7436	**35.7430**

Risultati Sperimentali con rumore $\sigma = 16$

Immagine	Bilineare	Gunturk	Hirakawa	Regolarizzazione
01	298.8264	244.7998	378.1123	**133.032329**
02	168.7641	230.5891	287.1973	**84.434205**
03	164.2436	232.2068	268.4808	**85.083996**
04	169.3755	237.0157	291.9594	**84.095716**
05	278.9205	235.0724	337.6051	**118.961080**
06	253.6741	235.8739	319.4615	**115.236951**
07	171.6520	234.5919	292.6410	**81.698239**
08	420.8498	248.5575	393.8394	**152.198485**
09	180.2516	238.3319	280.1942	**84.759654**
10	179.7413	237.1296	337.6051	**83.891951**
11	216.0796	233.2751	305.8112	**100.336501**
12	175.6196	234.1371	275.9865	**83.076485**
13	407.6366	251.5452	411.0613	**164.666885**
14	217.0885	244.5391	329.1412	**110.555375**
15	177.4617	216.0313	262.7383	**82.726121**
16	191.3162	238.3198	294.8009	**94.495262**
17	174.9292	221.4700	271.4415	**81.050326**
18	241.9690	236.6171	324.9663	**110.712711**
19	241.6391	238.6308	330.8231	**103.511232**
20	163.5093	185.7633	215.1850	**79.921001**
21	234.5010	240.2246	310.8051	**105.566970**
22	199.3652	242.6700	314.4196	**98.97431833**
23	160.7420	232.2523	261.0277	**75.071598**
24	130.3922	193.4792	183.4291	**66.2115**

GRAZIE PER L'ATTENZIONE